$\mathrm{O}(3)$-модель и инстантоны

Илья Кочергин

ОП «КТП, теория струн и мат. физика», курс « Избранные главы теоретической и математической физики»

1. Классическая теория поля

Как известно, классическую механику удобно описывать в Лагранжевом формализме — определяется функционал на траектория $q(t)$ (под q понимается какой-то набор координат, описывающий состояние системы в данный момент времени), называемый действием:

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt, \quad \dot{q} = \frac{dq}{dt}, \tag{1.1}$$

а уравнения движения получаются из условия экстремальности этого функционала ($\delta S = 0$).

Нам хотелось бы использовать этот же язык для описания теории поля. Под полем мы понимаем функцию. $\phi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, координаты в $\mathbb{R}^{n+1}$ будем обозначать как $x^\mu = (t, \vec{x}),\ \mu = 0, \ldots, n$. Соответственно, вместо конечного набора переменных $q(t)$ в каждый момент времени мы имеем бесконечное множество отображений $\phi(t, \vec{x})$. Поэтому лагранжиан L должен являться *функционалом* на пространстве полевых конфигураций $\phi(t, \vec{x})$ и $\partial_t\phi(t, \vec{x})$ при фиксированном t. Чтобы сделать задачу познаваемой, обычно рассматривают теории, для которых L имеет вид:

$$L = \int d^d x\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi), \tag{1.2}$$

где $\mathcal{L}$ является обычной функцией. Тогда действие есть:

$$S = \int d^{d+1} x\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \tag{1.3}$$

Уравнения движения можно получить, варьируя это действие:

$$\delta S = \int d^{d+1}x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\partial_\mu \delta\phi\right] \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \tag{1.4}$$

Здесь мы проинтегрировали по частям:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\partial_\mu \delta\phi = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\delta\phi\right) - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\delta\phi. \tag{1.5}$$

Если предположить, что $\delta\phi \to 0$ при $|x| \to \infty$, интеграл от первого слагаемого (а это просто дивергенция вектора с компонентами $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}$) зануляется в силу теоремы Гаусса. Обозначим $B_R = \{x : |x| < R\}$, тогда

$$\int d^{d+1}x\, \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\delta\phi\right) = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{B_R} d^{d+1}x\, \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\delta\phi\right) = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\partial B_R} dS\, n^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\delta\phi = 0, \tag{1.6}$$

здесь ∂B_R — граница B_R (сфера радиуса R), dS — элемент ее поверхности, а n^μ — единичный вектор внешний нормали к ней.

Заметим, что в такой формулировке нет выделенной роли времени по сравнению с пространственными координатами (она появляется, если мы задаем начальные условия при $t = \text{const}$). В частности, мы можем рассматривать теории, в которых время вообще отсутствует, а S имеет смысл, например, полной энергии системы. В таких случаях принято начинать нумерацию индексов с 1.

2. O(3)-модель и топология

Теорию поля бывает удобно использовать для описания конечномерных систем с большим числом степеней свободы. Мы рассмотрим один из примеров, в которых это позволяет получить довольно нетривиальный результат — двумерный ферромагнетик Гейзенберга. Он представляет собой систему спинов (трехмерных векторов единичной длины) $\vec{n}_i$, сидящих на двумерной решетке шага a с взаимодействием между ближайшими соседями. Энергия такой системы имеет вид:

$$S = -\frac{1}{g^2}\sum_{\{i,j\}}(\vec{n}_i, \vec{n}_j), \tag{2.1}$$

Классическое решение такой системы соответствует минимуму энергии. Перейдем к непрерывному пределу $a \to 0$. Один узел решетки с координатой $x = (x_1, x_2)$ дает вклад в энергию:

$$\begin{aligned} \Delta S_x &= -\frac{1}{2g^2}\left(\vec{n}(x), \vec{n}(x^1 + a, x^2) + \vec{n}(x^1 - a, x^2) + \vec{n}(x^1, x^2 + a) + \vec{n}(x^1, x^2 - a)\right) = \\ &= -\frac{1}{2g^2}\left(\vec{n}(x), 4\vec{n}(x) + a^2(\partial_1^2 + \partial_2^2)\vec{n}(x)\right) + o(a^2) = -\frac{2}{g^2} - \frac{a^2}{2g^2}(\vec{n}, \partial_\alpha^2\vec{n}) + o(a^2),\ \alpha = 1, 2 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Поскольку a^2 является объемом ячейки, мы можем переписать результат в виде интеграла, отбросив постоянный вклад:

$$S = -\frac{1}{2g^2}\int d^2x\,(\vec{n}, \partial_\alpha^2\vec{n}) = \frac{1}{2g^2}\int d^2x\,(\partial_\alpha\vec{n})^2. \tag{2.3}$$

Второе равенство следует из условия $\partial_\alpha^2(\vec{n}^2) = \partial_\alpha^2 1 = 0$.

В итоге мы получили теорию поля, которое задает отображение $\vec{n} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2$, при этом плотность лагранжиана является естественным скалярным произведением производных $\vec{n}$. Такие теории, в которых поля являются отображениями между двумя многообразиями, называются *сигма-моделями*. При этом пространство, на котором определены поля называется *мировой поверхностью*, а то, куда они отображают — *таргет-простраством*. В нашем случае теория симметрична относительно действия на $\vec{n}$ группы O(3) (она состоит из 3×3 матриц R, сохраняющих скалярное произведение, то есть $R^T R = 1$), поэтому теория называется *$O(3)$-моделью*.

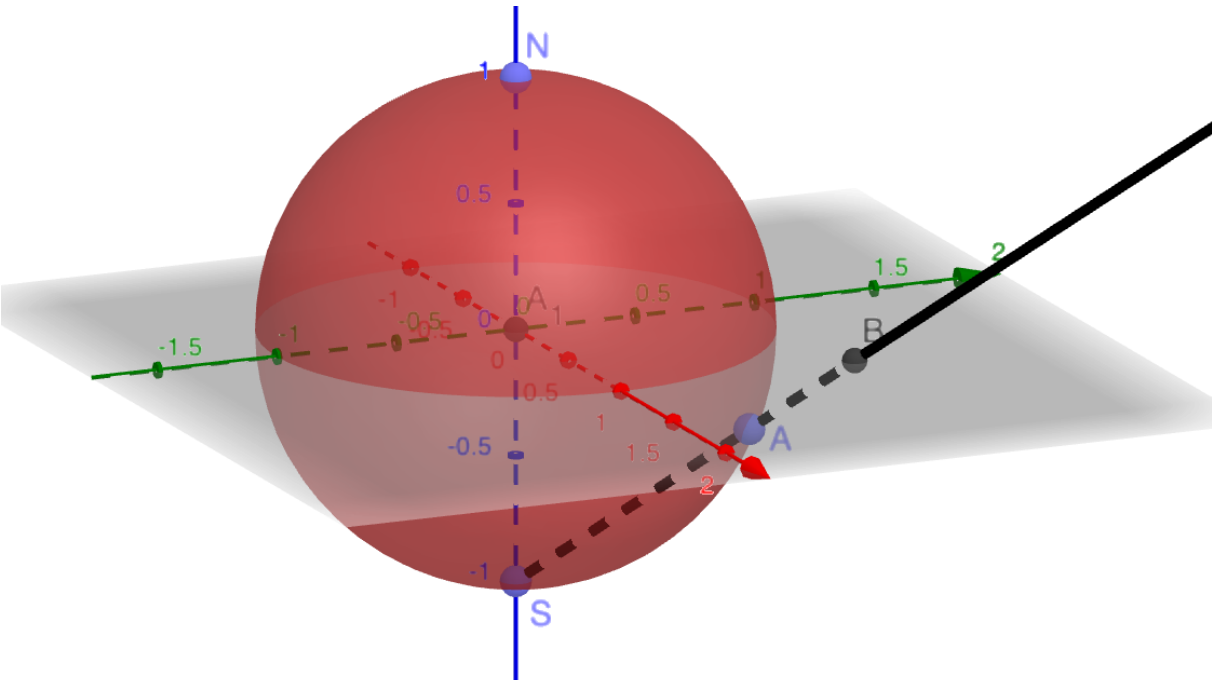

Рис. 1. Стереографическая проекция с южного полюса, точка B — образ точки A

Заметим, что существование предела $\vec{n}$ в бесконечности обеспечивает конечность действия и позволяет думать об $\vec{n}$ как о непрерывном отображении сферы в сферу. Нам будет удобно отождествлять $\mathbb{R}^2$, склеенное в бесконечности, со сферой с помощью стереографической проекции. А именно, рассмотрим сферу единичного радиуса, для которой наше $\mathbb{R}^2$ является экваториальной плоскостью. Будем испускать из южного полюса лучи, проходящие через точки на сфере. Точке сферы с полярными координатами (ϑ, φ) будем ставить в соответствие точку x пересечения луча с экваториальной плоскостью (рис. 1). При этом сам южный полюс соответствует бесконечности в $\mathbb{R}^2$. Несложно получить явный вид отображения:

$$x^1 = \frac{\sin\vartheta\cos\varphi}{1+\cos\vartheta}, \quad x^2 = \frac{\sin\vartheta\sin\varphi}{1+\cos\vartheta}. \tag{2.4}$$

Введем также полярные координаты (θ, ϕ) в таргет-пространстве:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Из топологии известно, что такие отображения разбиваются на классы эквивалентности относительно непрерывных деформаций (гомотопий). Разные классы имеют разные числа намотки сферы на сферу при отображении. То есть, любое отображение можно непрерывно продеформировать в отображение вида $\phi = q\varphi,\ \theta = \vartheta$, $q \in \mathbb{Z}$. Число q можно вычислить по такой формуле:

$$q = \frac{1}{8\pi}\int d^2x\, \varepsilon_{ijk}\varepsilon^{\alpha\beta} n^i \partial_\alpha n^j \partial_\beta n^k, \tag{2.6}$$

здесь ε — антисимметричный символ, $\varepsilon^{123} = 1$, $\varepsilon_{12} = 1$. Покажем для начала, что это выражение действительно инвариантно при непрерывных деформациях $\vec{n}(x)$, для этого рассмотрим его малую вариацию:

$$\begin{aligned} \delta q = \frac{1}{8\pi}\int d^2\, \varepsilon_{ijk}\varepsilon^{\alpha\beta}\left(\delta n^i \partial_\alpha n^j \partial_\beta n^k + 2n^i \partial_\alpha \delta n^j \partial_\beta n^k\right) = \frac{2}{8\pi}\int d^2x\, \partial_\alpha\left(\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{\alpha\beta} n^i \delta n^j \partial_\beta n^k\right) + \\ + \frac{3}{8\pi}\int d^2x\, \varepsilon_{ijk}\varepsilon^{\alpha\beta}\delta n^i \partial_\alpha n^j \partial_\beta n_k. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Здесь мы воспользовались антисимметричностью ε:

$$\varepsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\vec{n} = 0,\ \varepsilon^{ijk}\partial_\alpha n^i \delta n^j \partial_\beta n^k = -\varepsilon^{ijk}\delta n^i \partial_\alpha n^j \partial_\beta n^k. \tag{2.8}$$

Первое слагаемое в δq зануляется в силу граничных условий, а $(\delta\vec{n}, \partial_\alpha\vec{n}, \partial_\beta\vec{n}) = 0$, так как все эти векторы ортогональны $\vec{n}$. Отсюда $\delta q = 0$, а значит q действительно не меняется при непрерывных деформациях. В частности, мы можем добавить к действию слагаемое θq, называемое топологическим членом, которое не поменяет уравнений движения ($\delta q = 0$). При этом топологический может приводить к нетривиальным эффектам на квантовом уровне, а также нарушает симметрию модели с O(3) до SO(3) (это подгруппа O(3), состоящая из матриц с единичным детерминантом), так как он неинвариантен относительно преобразования $\vec{n} \to -\vec{n}$.

Теперь убедимся, что q является числом намотки. Заметим, что подинтегральное выражение имеет вид $2(\vec{n}, \partial_1\vec{n}, \partial_2\vec{n})d^2x$. При этом, поскольку $\vec{n}^2 = 1$, $(\vec{n}, \partial_\alpha\vec{n}) = 0$, поэтому $[\partial_1\vec{n}, \partial_2\vec{n}] \parallel \vec{n}$. Таким образом, смешанное произведение определяет площадь параллелограмма со сторонами $\partial_1\vec{n}dx^1$, $\partial_2\vec{n}dx^2$ с точностью до знака, который задает ориентацию отображения. С помощью непрерывных деформаций можно добиться того, чтобы векторное произведение было ненулевым всюду, кроме конечного числа точек, а значит, в силу непрерывности, ориентация была постоянной, то есть интеграл считает площадь, накрываемую отображением $\vec{n}$ пока x проходит все $\mathbb{R}^2$ (она равна $4\pi|q|$) с точностью до знака. Более формальный взгляд на этот факт представлен в задаче 1. Осталось показать, что получается правильный знак. Мы знаем, что для тождественного отображения $\theta = \vartheta$, $\phi = \varphi$ (то есть $\vec{n}$ получается просто обратной проекцией точки x на сферу) он должен быть положительным ($q = 1$). Это нетрудно проверить явно, посмотрев на направления $\partial_1\vec{n}$ и $\partial_2\vec{n}$ в какой-нибудь точке.

На этом моменте может возникнуть вопрос, зачем же все это нужно. Дело в том, что обычно, при наличии нетривиальных топологических классов полей, в каждом таком классе можно найти решение, на котором достигается глобальный минимум действия (по данному классу). При этом уравнения на такое решения обычно гораздо проще обычных уравнений движения. Сейчас мы увидим, что все это верно для O(3)-модели. Будем считать $q \geq 0$ и воспользуемся следующим трюком:

$$\int d^2x(\partial_\alpha \vec{n} + \varepsilon^{\alpha\beta}[\vec{n}, \partial_\beta \vec{n}])^2 = 2\int d^2x(\partial_\alpha \vec{n})^2 - 2\int d^2x\varepsilon^{\alpha\beta}(\vec{n}, \partial_\alpha \vec{n}, \partial_\beta \vec{n}) = 4g^2 S - 16\pi q, \tag{2.9}$$

то есть $S \geq \frac{4\pi q}{g^2}$, так как левая часть неотрицательна. При этом минимум достигается в случае $\partial_\alpha \vec{n} = -\varepsilon^{\alpha\beta}[\vec{n}, \partial_\beta \vec{n}]$, такие решения называются *инстантонами*. Это уравнение первого порядка, в отличие от уравнений движения, но его все еще не очень приятно решать из-за наличия условия связи $\vec{n}^2 = 1$. Чтобы упростить задачу, нам нужно будет перейти к другим координатам.

3. Комплексный анализ и инстантоны

Мы уже поняли, что нам нужен более удобный набор координат на сфере. Сделаем стереографическую проекцию в таргет-пространстве (так же, как на рис. 1) и введем в получившемся $\mathbb{R}^2$ комплексную координату $\chi = \psi^1 + i\psi^2$. Из подобия треугольников несложно понять, что отображение имеет вид:

$$\chi = \frac{n^1 + in^2}{1 + n^3}. \tag{3.1}$$

Теперь мы можем переписать действие и число намотки в терминах χ:

$$S = \frac{2}{g^2}\int d^2x\, \frac{\partial_\alpha \bar{\chi}\partial_\alpha \chi}{(1+\chi\bar{\chi})^2}, \quad q = \frac{1}{2\pi i}\int d^2x\, \varepsilon^{\alpha\beta}\frac{\partial_\alpha \bar{\chi}\partial_\beta \chi}{(1+\chi\bar{\chi})^2}, \tag{3.2}$$

при этом χ свободно от дополнительных условий. Для получения оценки на действие в новых терминах нужно рассмотреть интеграл от $\left|\frac{\partial_\alpha \chi + i\varepsilon^{\alpha\beta}\partial_\beta \chi}{1+\chi\bar{\chi}}\right|^2$, отсюда мы получаем уравнение:

$$\partial_\alpha \chi + i\varepsilon^{\alpha\beta}\partial_\beta \chi = 0. \tag{3.3}$$

Чтобы лучше понять смысл этого уравнения, нам понадобятся некоторые элементы комплексного анализа. Введем на мировой поверхности комплексную координату $z = x + iy$, соответственно, $\bar{z} = x - iy$. Нам будет удобно думать о них как о независимых переменных, определив соответствующие производные ∂ и $\bar{\partial}$. Это можно сделать, потребовав:

$$df = \partial_1 f dx^1 + \partial_2 f dx^2 = \partial f dz + \bar{\partial} f d\bar{z}, \tag{3.4}$$

где f — какая-нибудь дифференцируемая функция. Отсюда несложно получить:

$$\partial = \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2), \quad \bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2). \tag{3.5}$$

Отсюда следует, что если функция f записана в виде какого-то выражения от z и $\bar{z}$, можно вычислять ∂ и $\bar{\partial}$ как обычные частные производные. Аналогично, в теории поля можно писать уравнения движения вида (1.4), считая частные производные плотности лагранжиана по полю χ и его производным (их комплексному сопряжению будут соответствовать уравнения, получающиеся дифференцированием по $\bar{\chi}$).

В комплексных координатах уравнение (3.3) имеет очень простой вид:

$$\bar{\partial}\chi = 0. \tag{3.6}$$

Функции, удовлетворяющие такому условию, называют *голоморфными*, они обладают большим рядом хороших свойств. В частности, для них хорошо определена производная $\chi'(z) = \lim_{|h|\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$ для случая комплексных h, которая, очевидно, совпадает с $\partial\chi$. Более того, такие функции автоматически оказываются бесконечно-дифференцируемыми. Чтобы было проще писать явные выражения, воспользуемся симметрией относительно вращений и зафиксируем $\chi(\infty) = 0$, то есть бесконечность переходит в северный полюс. При этом из комплексного анализа известно, что единственной голоморфной всюду функцией, обращающейся в 0 на бесконечности, является константа.

Поэтому нетривиальное решение должно иметь особенности, то есть точки, которые переходят в южный полюс. Простейшая такая функция имеет вид:

$$\chi = \frac{a}{z-b}. \tag{3.7}$$

Несложно увидеть, что интеграл для S в точке b сойдется: числитель и знаменатель имеют одинаковый порядок $\frac{1}{r^4}$ в полярных координатах $z = b + re^{i\phi}$. Вычислим для него число намотки, для этого заметим, что

$$\varepsilon^{\alpha\beta}\frac{\partial_\alpha\bar{\chi}\partial_\beta\chi}{(1+\chi\bar{\chi})^2} = \partial_\alpha\left(\varepsilon^{\alpha\beta}\frac{\bar{\chi}\partial_\beta\chi}{1+\chi\bar{\chi}}\right). \tag{3.8}$$

Выражение под знаком производной сингулярно в окрестности точки b, поэтому мы не можем использовать двумерную теорему Гаусса для всего пространства. При этом мы знаем, что интеграл для q сходится, поэтому, обозначив $O_\epsilon = \{z : |z-b| = \epsilon\}$, мы можем написать:

$$q = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus O_\epsilon} d^2x\,\varepsilon^{\alpha\beta}\frac{\partial_\alpha\bar{\chi}\partial_\beta\chi}{(1+\chi\bar{\chi})^2} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-b|=\epsilon} dl\,\epsilon^{\alpha\beta}n_\alpha\frac{\bar{\chi}\partial_\beta\chi}{1+\chi\bar{\chi}}. \tag{3.9}$$

Здесь n_α — вектор внутренней нормали к окружности $|z-b| = \epsilon$. Заметим, что $\varepsilon^{\alpha\beta}n_\alpha$ — единичный касательный вектор, ориентированный по часовой стрелке. Поэтому:

$$q = -\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-b|=\epsilon} dl^\alpha\frac{\bar{\chi}\partial_\alpha\chi}{1+\chi\bar{\chi}} = /z = b + re^{i\phi}/ = -\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} d\phi\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2}(-i) = 1, \tag{3.10}$$

мы воспользовались тем, что $dl^\alpha\,\partial_\alpha\chi = d\phi\,\partial_\phi\chi$. Теперь несложно написать решение для $q = n$:

$$\chi = \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{z-b_i}, \tag{3.11}$$

b_j попарно различны. Действительно, при вычислении интеграла нужно будет выкинуть n кругов вокруг точек b_i, а на окружности вокруг b_j давать вклад будет только слагаемое $\frac{a_j}{z-b_j}$, поэтому каждый контурный интеграл будет единичным.

В завершение скажем, какую пользу инстантоны приносят в квантовой теории поля. На предыдущих семинарах рассматривались матричные модели, в которых средние значения разных величин получались интегрированием по всем матрицам, распределенным с некоторой плотностью. В КТП ситуация похожа:

$$\langle F[\chi,\bar{\chi}]\rangle = \frac{\int\mathcal{D}\chi\mathcal{D}\bar{\chi}F[\chi,\bar{\chi}]e^{-S[\chi,\bar{\chi}]}}{\int\mathcal{D}\chi\mathcal{D}\bar{\chi}e^{-S[\chi,\bar{\chi}]}}. \tag{3.12}$$

Здесь $\mathcal{D}\chi\mathcal{D}\bar{\chi}$ — некоторая мера интегрирования по пространству полей, то, как именно она устроена, нас интересовать не будет. В качестве F обычно рассматривают выражения вида $\chi(x_1)\ldots\chi(x_k)$ и их производные. Общий рецепт тот же, что и в матричных моделях: мы умеем считать интеграл в случае, когда действие квадратично по полям, а экспоненту от остальных членов раскладываем в ряд. Сделаем в действии 3.2 замену $\chi\to g\eta$, плотность лагранжиана тогда примет вид:

$$\mathcal{L} = 2\frac{\partial_\alpha\bar{\eta}\partial_\alpha\eta}{(1+g^2\eta\bar{\eta})^2} = 2\partial_\alpha\bar{\eta}\partial_\alpha\eta(1-2g^2\eta\bar{\eta}+\ldots). \tag{3.13}$$

Отсюда видно, что g определяет, насколько сильно теория отличается от квадратичной. Раскладывая экспоненту, мы будем получать ответы в виде степенных рядов по g^2.

С другой стороны, нам ничего не мешает раскладываться вблизи ненулевого классического решения η_0. Мы имеем:

$$S[\eta_0+\eta] = S_{\text{cl}}[\eta_0] + S^{(2)}[\eta_0,\eta] + S^{(3)}[\eta_0,\eta] + \ldots, \tag{3.14}$$

здесь в скобках над каждым членом мы указываем его порядок по η. Первого порядка нет, так как для классического решения $\delta S = 0$. Оставляя $S^{(2)}$ и раскладывая экспоненту от более старших членов, мы опять будем получать ряды по g. Более интересен для нас член $S_{\text{cl}}[\eta_0]$, он вынесется как общий фактор $e^{-S_{\text{cl}}[\eta_0]}$. При этом мы знаем, что на инстантонных решениях $S_{\text{cl}} = \frac{4\pi q}{g^2}$. Как известно, у функции $e^{-\frac{4\pi q}{g^2}}$ все коэффициенты ряда Тейлора в $g = 0$ нулевые, поэтому она не может появиться в результате суммирования рядов при разложении вблизи нулевого решения. Вообще говоря, теория возмущений около инстантонного решения дает только часть ответа, соответствующую интегрированию по полям из топологического класса этого решения. Кроме того, у инстантонов есть параметры, вариация которых не меняет действие, при этом они могут нетривиально входят в меру $\mathcal{D}\chi\mathcal{D}\bar{\chi}$. В некоторых ситуациях возможен систематический учет всех этих эффектов и полное суммирование по топологическим классам, в частности, в $\mathrm{O}(3)$-модели из-за инстантонов генерируется масса.

4. Задачи

1) Перепишите q в терминах полярных координат (2.5) и покажите, что

$$q = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \sin\theta(x) d\theta(x) d\phi(x), \tag{4.1}$$

считая ориентацию положительной.

2) Получите уравнения движения для поля χ и проверьте, что решения (3.3) им удовлетворяет.

3) Симметрию $\mathrm{O}(3)$-модели относительно вращений не так просто увидеть в действии (3.2). Оказывается, что она реализуется нелинейно. Рассмотрим семейство преобразований

$$\chi \mapsto \frac{a\chi + b}{c\chi + d}, \; a, \; b, \; c, \; d \in \mathbb{C}, \tag{4.2}$$

для которых $ad - bc \neq 0$. Также удобно использовать матричную форму записи:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

- Покажите, что такие преобразования определяют действие группы $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ невырожденных комплексных матриц 2×2 на сфере, то есть последовательное применение преобразований, соответствующих матрицам A и A' дает преобразование, соответствующее матрице $A'A$.
- Поскольку замена $A \to \lambda A$ не меняет преобразование, мы можем рассматривать только матрицы с единичным детерминантом. При этом все еще остается возможность домножения на -1. Покажите, что действие (3.2) не меняется, если $A^\dagger A = 1$, где $A^\dagger$ — эрмитово сопряжение. Такие матрицы образуют группу $\mathrm{SU}(2)$ — это является отражением того факта, что группа $\mathrm{SO}(3)$ эквивалентна $\mathrm{SU}(2)$, рассматриваемой с точность до умножения на -1.
- Найдите, как преобразуется $\vec{n}$ при замене $\chi \mapsto \bar{\chi}$ и покажите, что матрица соответствующего преобразования содержится в $\mathrm{O}(3)$ и имеет отрицательный детерминант. Осознайте, что вместе с результатом предыдущего пункта это позволяет описать действие всей группы симметрий $\mathrm{O}(3)$ на χ.

4) В случае $q < 0$ оценка $S \geq \frac{4\pi q}{g^2}$ не очень содержательна, так как действие всегда неотрицательно.

- Подумайте, как модифицировать трюк (2.9) для получения осмысленной оценки и перепишите соответствующее уравнение для минимизирующего χ в комплексных координатах. Его решения называют *антиинстантонами*.
- Напишите какое-нибудь простое антиинстанное решение и явно вычислите для него число намотки.

Задачи можно присылать на почту kochergin.iv@phystech.edu.