



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Белавин, Л. А. Сподынейко, Пространственно-временная суперсимметрия в десятимерной теории струн в подходе Гепнера, *ТМФ*, 2015, том 185, номер 2, 329–345

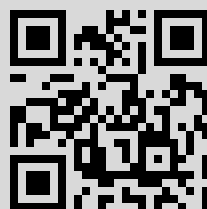
DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8989>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 77.236.39.2

1 февраля 2020 г., 22:25:14



© 2015 г.

А. А. Белавин<sup>\*†‡</sup>, Л. А. Сподынейко<sup>\*</sup>

## ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ СУПЕРСИММЕТРИЯ В ДЕСЯТИМЕРНОЙ ТЕОРИИ СТРУН В ПОДХОДЕ ГЕПНЕРА

Фермионная струна Невё–Шварца–Рамона имеет скрытую  $N = 2$  суперконформную симметрию на мировом листе. Показано, как получить подпространство физических состояний струны, на котором действует группа супер-Пуанкаре, используя изоморфизм  $N = 2$  суперконформной алгебры, задаваемый спектральным потоком. Предложенная конструкция является альтернативой GSO-проекции в теории струн.

**Ключевые слова:** теория струн, конформная теория поля.

DOI: 10.4213/tmf8989

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Роль теории суперструн [1]–[3] в современной теоретической и математической физике хорошо известна. Важным свойством этой теории является пространственно-временная суперсимметрия, которая, как предполагается, является естественным механизмом решения проблемы иерархии.

Пространственно-временная суперсимметрия фермионной струны Невё–Шварца–Рамона [4], [5] возникает, как было показано Глиозици, Шерком и Оливом [6], [7], после редукции пространства физических состояний струны. Точнее, ими было показано, что после этой редукции число физических состояний в бозонном (NS) и фермионном (R) секторах одно и то же для каждого подсектора с заданной массой. Сами операторы супер-Пуанкаре в ковариантном подходе были построены Фриданом, Шенкером и Мартинеком [8], [9], а также Книжником [10]. Авторы

---

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00150) в Институте проблем передачи информации РАН.

---

<sup>\*</sup>Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, Черноголовка, Московская обл., Россия. E-mail: belavin@itp.ac.ru, lionspo@itp.ac.ru

<sup>†</sup>Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Московская обл., Россия

<sup>‡</sup>Институт проблем передачи информации РАН, Москва, Россия

этих работ использовали “спиновое” поле в материальном секторе, а также бозонизацию полей духового сектора для построения вертекса безмассового фермиона. Предел этого оператора при нулевом импульсе позволяет построить оператор пространственно-временной суперсимметрии в ковариантном подходе к квантованию струны Невё–Шварца–Рамона. При этом GSO-редукция<sup>1)</sup> необходима для того, чтобы введенные генераторы пространственно-временной суперсимметрии были корректно определены.

Гешнер [11] показал, что условием для суперсимметрии в пространстве-времени при компактификации десятимерной струны до четырехмерного пространства Минковского является  $N = 2$  суперконформная симметрия теории в шести компактных измерениях. Гешнер объяснил, как оператор так называемого спектрального потока, реализующий преобразование NS-сектора в R-сектор и наоборот, может быть использован для построения генератора пространственно-временной суперсимметрии.

Между тем исходная  $d = 10$  струна Невё–Шварца–Рамона сама обладает скрытой  $N = 2$  суперконформной симметрией на мировом листе. В настоящей статье мы показываем, как, используя эту алгебру и оператор  $U$  ее спектрального потока, отображающего ее NS-сектор и R-сектор друг в друга, ограничить пространство локальных физических полей требованием их локальности по отношению к этому оператору  $U$ , а затем определяем на этом подпространстве действие супергенераторов пространственно-временной симметрии.

Требование локальности эквивалентно условию GSO-проекции, а сама конструкция, использующая полную  $N = 2$  суперконформную симметрию струны Невё–Шварца–Рамона в БРСТ-подходе, приводит к той же (с точностью до действия оператора смены картины) формуле для суперзаряда в десятимерной суперструне, что и в подходах [8], [10]. Однако такая формулировка, отсутствующая в стандартных учебниках (см., например, [1], [2]), является полезной. Во-первых, она делает процедуру достижения пространственно-временной суперсимметрии в десяти измерениях более прозрачной. Во-вторых, из нее естественным образом следует гипотеза Гешнера о необходимости  $N = 2$  суперконформной симметрии в компактном секторе при компактификации шести измерений суперструны. Компактификация должна быть такой, чтобы не нарушить  $N = 2$  суперконформную симметрию на мировом листе, которая исходно имеет место в десятимерной струне.

## 2. КОНФОРМНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Как обычно в теории струн, мы будем использовать язык двумерной конформной теории поля [12]. Это связано с тем, что любая версия теории струн обладает конформной инвариантностью.

Двумерная конформная теория поля – это теория поля, в которой след тензора энергии-импульса равен нулю:

$$T_a^a = 0. \quad (2.1)$$

Мы будем исследовать локальные поля в этой теории. Важной характеристикой полей в конформной теории поля является их конформная размерность. Конформные размерности  $\Delta$ ,  $\bar{\Delta}$  поля  $\Phi$  определяются как

$$\Phi(z, \bar{z}) = \lambda^\Delta \lambda^{\bar{\Delta}} \Phi(\lambda z, \lambda \bar{z}). \quad (2.2)$$

<sup>1)</sup>Проекция Глиозци–Шерка–Олива (Gliozzi–Scherk–Olive).

В конформной теории поля удобно пользоваться операторными разложениями. Они дают разложение двух полей в корреляционных функциях  $\langle \dots \Phi_1(z, \bar{z}) \Phi_2(w, \bar{w}) \dots \rangle$  в виде комбинации локальных полей, когда операторы расположены близко друг к другу,  $z \rightarrow w$ . Например, операторное разложение тензора энергии-импульса самого с собой имеет вид

$$T(z)T(w) \sim \frac{c}{2(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{z-w}\partial T(w) + \text{регулярные члены.} \quad (2.3)$$

Здесь и далее мы будем опускать то, что это выражение понимается как часть корреляционной функции. Также мы будем писать в операторных разложениях только сингулярную часть.

Вариация полей при бесконечно малых преобразованиях  $z \rightarrow z + \varepsilon(z)$  дается формулой

$$\delta_\varepsilon \Phi = \int dz \varepsilon(z) T(z) \Phi(0, 0). \quad (2.4)$$

Соответственно, выбирая  $\varepsilon(z) = z^{n+1}$ , определим операторы

$$L_n = \int dz z^{n+1} T(z), \quad (2.5)$$

где интеграл берется по контуру, содержащему точку  $z = 0$ , в которой находится поле, на которое действует  $L_n$ . Используя операторное разложение (2.3), можно показать, что коммутатор этих операторов имеет вид

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m,-n}. \quad (2.6)$$

Этот пример показывает, что операторное разложение голоморфных токов  $T(z)$  эквивалентно коммутационным соотношениям (2.6) для их фурье-компонент. Аналогично можно определять фурье-компоненты и коммутационные соотношения для других голоморфных токов.

### 3. СТРУНА НЕВЁ–ШВАРЦА–РАМОНА

Действие материальной части свободной десятимерной струны Невё–Шварца–Рамона [4], [5] имеет вид

$$S_m = \int d^2z [\partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu + \psi_\mu \bar{\partial} \psi^\mu + \tilde{\psi}_\mu \partial \tilde{\psi}^\mu], \quad (3.1)$$

где  $\mu = 0, \dots, 9$ ,  $X_\mu$ ,  $\psi_\mu$ ,  $\tilde{\psi}_\mu$  – поля материи. Здесь и далее мы будем рассматривать только голоморфную часть полей. Эти поля имеют следующие операторные разложения:

$$X_\mu(z)X_\nu(0) \sim -\eta_{\mu\nu} \ln z, \quad \psi_\mu(z)\psi_\nu(0) \sim \frac{\eta_{\mu\nu}}{z}, \quad (3.2)$$

где метрика  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ . Все остальные операторные разложения регулярны. Поля  $\psi_\mu$  имеют следующие периодические условия при обходе вокруг вертексного оператора в точке  $z = 0$ :

$$\psi_\mu(e^{2\pi i}z) = e^{2\pi i\nu} \psi_\mu(z). \quad (3.3)$$

При  $\nu = 1/2$  считается, что вертексный оператор в точке  $z = 0$  находится в R-секторе, а при  $\nu = 0$  – в NS-секторе.

Как хорошо известно, эта теория обладает  $N = 1$  суперконформной симметрией. Соответствующие тензор энергии-импульса и суперток имеют вид

$$T^m = -\frac{1}{2}\partial X^\mu\partial X_\mu - \frac{1}{2}\psi^\mu\partial\psi_\mu, \quad G^m = i\psi^\mu\partial X_\mu. \quad (3.4)$$

Здесь и ниже индекс  $m$  обозначает принадлежность к материальному сектору.

Токи  $T^m(z)$  и  $G^m(z)$  удовлетворяют соотношениям  $N = 1$  суперконформной алгебры

$$\begin{aligned} T(z)T(0) &\sim \frac{c}{2z^4} + \frac{2}{z^2}T(0) + \frac{1}{z}\partial T(0), \\ T(z)G(0) &\sim \frac{3}{2z^2}G(0) + \frac{1}{z}\partial G(0), \\ G(z)G(0) &\sim \frac{2c}{3z^3} + \frac{2}{z}T(0) \end{aligned} \quad (3.5)$$

с центральным зарядом  $c = c_m = 15$ . Если разложить токи по модам:

$$T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}, \quad G(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \nu + 1/2} G_r z^{-r-3/2},$$

то коммутационные соотношения для мод примут вид

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m, -n}, \quad (3.6)$$

$$\{G_r, G_s\} = 2L_{r+s} + \frac{c}{12}(4r^2 - 1)\delta_{r, -s}, \quad (3.7)$$

$$[L_m, G_r] = \frac{m - 2r}{2}G_{m+r}, \quad (3.8)$$

где  $n, m \in \mathbb{Z}$ ,  $r, s \in \mathbb{Z} + \nu + 1/2$ . Соответственно, ток  $G(z)$  разлагается по целым модам в R-секторе и по полуцелым в NS-секторе.

Из этих коммутационных соотношений следует одно важное неравенство. Для произвольного поля  $\Phi$  в R-секторе

$$|G_0|\Phi\rangle|^2 = \frac{1}{2}\langle\Phi|\{G_0, G_0\}|\Phi\rangle = \left\langle\Phi\left|\left(L_0 - \frac{c}{24}\right)\right|\Phi\right\rangle = \left(\Delta - \frac{c}{24}\right)\langle\Phi|\Phi\rangle \geq 0. \quad (3.9)$$

Отсюда следует, что в унитарной теории размерности всех полей в R-секторе удовлетворяют соотношению  $\Delta \geq c/24$ , причем равенство достигается тогда и только тогда, когда  $G_0|\Phi\rangle = 0$ . Поля с конформной размерностью  $\Delta = c/24$  и нулевым пространственно-временным импульсом называются рамоновскими вакуумами, они будут важны для нас в дальнейшем.

Для полей материи имеются 32 рамоновских вакуума  $S_\alpha(z)$ ,  $\alpha = 1, \dots, 32$ , которые преобразуются как 32-компонентный спинор. А именно,

$$\psi^\mu(z)S_\alpha(0) \sim \frac{1}{\sqrt{2z}}\Gamma_{\alpha\beta}^\mu S_\beta(0), \quad (3.10)$$

где  $\Gamma^\mu$  – гамма-матрицы размера  $32 \times 32$ . Заметим, что из-за присутствия  $\sqrt{z}$  при обходе поля  $\psi_\mu(z)$  вокруг нуля возникает знак минус в правой части (3.10), как и должно быть в R-секторе согласно формуле (3.3).

В теории струн токи  $T^m(z)$ ,  $G^m(z)$  являются связями. По этой алгебре связей можно построить БРСТ-заряд. При этом нужно внести два фермионных духа  $b, c$ ,

соответствующих связям, генерируемым током  $T^m(z)$ , и два бозонных духа  $\beta$ ,  $\gamma$ , соответствующих  $G^m(z)$ . В результате БРСТ-заряд примет вид

$$Q_B = \int dz \left[ cT^m + \gamma G^m + \frac{1}{2}(cT^{\text{gh}} + \gamma G^{\text{gh}}) \right]. \quad (3.11)$$

Физические состояния  $\Phi$  определяются как когомологии БРСТ-заряда

$$Q_B \Phi = 0, \quad \Phi \simeq \Phi + Q_B \Psi. \quad (3.12)$$

Последняя формула означает, что поля, отличающиеся на БРСТ-точный член  $Q_B \Psi$  для любого поля  $\Psi$ , физически эквивалентны. Определенные таким образом физические состояния имеют положительную норму, и их спектр совпадает со спектром суперструны в калибровке светового конуса.

Поля духов имеют следующие операторные разложения:

$$\beta(z)\gamma(0) \sim -\frac{1}{z}, \quad b(z)c(0) \sim \frac{1}{z}. \quad (3.13)$$

Действие духов имеет вид

$$S_{\text{gh}} = \int d^2z [b\bar{\partial}c + \beta\bar{\partial}\gamma + \text{h.c.}]. \quad (3.14)$$

Это действие обладает  $N = 1$  суперконформной симметрией. Соответствующие токи имеют вид

$$T^{\text{gh}} = -\partial b c - 2b \partial c - \frac{1}{2} \partial \beta \gamma - \frac{3}{2} \beta \partial \gamma, \quad G^{\text{gh}} = \partial \beta c + \frac{3}{2} \beta \partial c - 2b \gamma. \quad (3.15)$$

Они удовлетворяют соотношениям суперконформной алгебры с центральным зарядом  $c_{\text{gh}} = -15$ .

Монодромия полей  $\beta$ ,  $\gamma$  также зависит от сектора. Для того чтобы БРСТ-заряд был корректно определен, подынтегральное выражение в (3.11) должно быть периодически при обходе вокруг нуля. Поэтому поля  $\beta$ ,  $\gamma$  должны иметь ту же монодромию, как и  $\psi_\mu$ , т. е. духовая и материальная составляющие вертексного оператора в точке  $z = 0$  должны быть в одном и том же секторе:

$$\psi_\mu(e^{2\pi i} z) = e^{2\pi i \nu} \psi_\mu(z), \quad \beta(e^{2\pi i} z) = e^{2\pi i \nu} \beta(z), \quad \gamma(e^{2\pi i} z) = e^{2\pi i \nu} \gamma(z), \quad (3.16)$$

где  $\nu = 1/2$  в R-секторе,  $\nu = 0$  в NS-секторе.

$(\beta, \gamma)$ -Система имеет ряд вакуумов  $V_q(z)$ , параметризуемых полуцелым числом  $q$ , которое называется *номером картины* [13], а само пространство состояний, порождаемое полями  $\psi_\mu$ ,  $\partial X_\mu$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $b$ ,  $c$  из вакуума  $V_q$ , называется *картиной*. Сами эти пространства до наложения на них связей не изоморфны друг другу при различных значениях  $q$ . Вакуумы  $V_q$  определяются условиями

$$\beta(z)V_q(0) \sim O(z^q), \quad \gamma(z)V_q(0) \sim O(z^{-q}). \quad (3.17)$$

Заметим, что из этих формул следует, что при обходе вокруг нуля поля  $\beta$ ,  $\gamma$  приобретают фазу  $e^{2\pi i q}$ . Соответственно, для того чтобы вертекс  $V_q$  был в NS-секторе,  $q$  должно быть целым. В R-секторе  $q$  должно быть полуцелым.

Можно строить вертексы и искать физические состояния для разного выбора картины. Известно [13], что между физическими состояниями (БРСТ-когомологиями)

в разных картинах имеется изоморфизм. Он осуществляется так называемым оператором смены картины. Удобно в качестве канонических выбрать картины с  $q = -1/2$  в R-секторе и  $q = -1$  в NS-секторе.

Общий вид вертекса в NS-секторе дается формулой

$$P(\psi_\mu, \partial X_\mu, \beta, \gamma, b, c) V_q e^{ik_\mu X^\mu}, \quad (3.18)$$

где  $P$  – некоторый полином от своих аргументов,  $k_\mu$  – импульс частицы. При этом  $q$  должно принимать целые значения.

Общий вид вертекса в R-секторе, в свою очередь, дается формулой

$$P^\alpha(\psi_\mu, \partial X_\mu, \beta, \gamma, b, c) S_\alpha V_q e^{ik_\mu X^\mu}, \quad (3.19)$$

где  $P^\alpha$  – некоторый полином от своих аргументов, принимающий значения в 32-компонентном спиновом пространстве,  $k_\mu$  – импульс частицы. При этом  $q$  должно принимать полуцелые значения.

Важными примерами таких вертексов для нас будут вертексы бозона и фермиона в картинах  $q = -1$  и  $q = -1/2$

$$V_{\text{NS}} = \xi_\mu \psi^\mu V_{-1} e^{ik_\mu X^\mu}, \quad V_{\text{R}} = u^\alpha S_\alpha V_{-1/2} e^{ik_\mu X^\mu}, \quad (3.20)$$

где  $u_\alpha, \xi_\mu$  – поляризации частиц.

#### 4. $N = 2$ СУПЕРКОНФОРМНАЯ АЛГЕБРА

В этом разделе мы определим  $N = 2$  суперконформную алгебру, а также ее изоморфизм, так называемый спектральный поток, который будет играть решающую роль в дальнейшем.

$N = 2$  суперконформная алгебра состоит из токов  $T(z), G^\pm(z), J(z)$ . Ток  $T(z)$  – это тензор энергии-импульса размерности 2,  $G^\pm(z)$  – два супертока размерности  $3/2$ , поле  $J(z)$  –  $U(1)$ -ток размерности 1, который соответствует R-симметрии  $N = 2$  супералгебры. Они имеют следующие операторные разложения:

$$\begin{aligned} T(z)G^\pm(0) &\sim \frac{3}{2z^2}G^\pm(0) + \frac{1}{z}\partial G^\pm(0), & T(z)J(0) &\sim \frac{1}{z^2}J(0) + \frac{1}{z}\partial J(0), \\ G^+(z)G^-(0) &\sim \frac{2c}{3z^3} + \frac{2}{z^2}J(0) + \frac{2}{z}T(0) + \frac{1}{z}\partial J(0), & G^\pm(z)G^\pm(0) &\sim 0, \\ J(z)G^\pm(0) &\sim \pm \frac{1}{z}G^\pm(0), & J(z)J(0) &\sim \frac{c}{3z^2}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Эта алгебра содержит  $N = 1$  суперконформную подалгебру с токами  $T(z), G(z) = (G^+ + G^-)/\sqrt{2}$  с тем же центральным зарядом  $c$ . Если разложить токи по модам:

$$G^\pm(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + 1/2 \pm \nu} G_r^\pm z^{-r-3/2}, \quad T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}, \quad J(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n z^{-n-1}, \quad (4.2)$$

то коммутационные соотношения для мод примут вид

$$\begin{aligned} &= \left( \frac{m}{2} - r \right) G_{m+r}^\pm, & [L_m, J_n] &= -nJ_{m+n}, \\ \{G_r^+, G_s^-\} &= 2L_{r+s} + (r-s)J_{r+s} + \frac{c}{3} \left( r^2 - \frac{1}{4} \right) \delta_{r+s,0}, & \{G_r^\pm, G_s^\pm\} &= 0, \\ [J_n, G_r^\pm] &= \pm G_{r+n}^\pm, & [J_m, J_n] &= \frac{c}{3} m \delta_{m+n,0}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Число  $\nu$  зависит от условий на монодроию  $G^\pm(z)$ ,

$$G^\pm(e^{2\pi i} z) = e^{\pm 2\pi i \nu} G^\pm(z), \quad (4.4)$$

$\nu$  может принимать произвольные вещественные значения. Нас будут в основном интересовать случаи  $\nu = 0$  и  $\nu = 1/2$ , соответствующие NS-сектору и R-сектору.

$N = 2$  суперконформная алгебра обладает изоморфизмом [14]

$$L'_n = L_n + \eta J_n + \frac{1}{6} \eta^2 c \delta_{n,0}, \quad J'_n = J_n + \frac{c}{3} \eta \delta_{n,0}, \quad (G_r^\pm)' = G_{r \pm \eta}^\pm. \quad (4.5)$$

Действие этого изоморфизма на представлениях суперконформной алгебры имеет следующую реализацию [11], [15] в терминах бозонного скалярного поля  $\varphi(z)$ . Бозонизуем ток  $J(z)$ :

$$J(z) = \partial\varphi(z), \quad \varphi(z)\varphi(0) \sim \frac{c}{3} \ln z. \quad (4.6)$$

Заметим, что бозон  $\varphi(z)$  зависит от конкретной реализации генераторов  $N = 2$  суперконформной алгебры в терминах полей той теории, в которой эта алгебра действует. Ниже будет показано, что как в секторе материи, так и в секторе духов действует  $N = 2$  суперконформная алгебра, и будут получены выражения, связывающие бозоны для  $U(1)$ -токов в каждом из секторов со скалярными полями, бозонизующими поля в этих секторах.

Рассмотрим произвольный оператор  $V$ , имеющий заряд  $q$  относительно тока  $J$ , и запишем его, выделив заряженную часть:

$$V = \widehat{V} e^{3iq\phi/c}, \quad (4.7)$$

где оператор  $\widehat{V}$  является нейтральным относительно  $J(z)$ . Соответствующая процедура для токов  $G^\pm(z)$  дает

$$G^\pm = \widehat{G}^\pm e^{\pm 3\phi/c}. \quad (4.8)$$

Для каждого поля  $V$  в нашем представлении суперконформной алгебры мы можем написать соответствующий оператор, твистованный на  $\eta$ :

$$V_\eta = V e^{\eta\phi} = \widehat{V} e^{(3q/c + \eta)\phi}. \quad (4.9)$$

Нетрудно убедиться, что при этом заряд поля изменится как

$$q' = q + \frac{c}{3} \eta. \quad (4.10)$$

Также, если, например, начальное поле сливалось с  $G^\pm$  по целым степеням  $z^n$ , то поле  $V_\eta$  будет сливаться с  $G^\pm$  по степеням  $z^{n \pm \eta}$ . Дополнительная степень возникает из-за слияния  $e^{\eta\phi}$  с  $e^{\pm 3\phi/c}$ . Конформная размерность поля  $V_\eta$  равна

$$\Delta' = \Delta + \frac{c}{6} \left( \frac{3q}{c} + \eta \right)^2 - \frac{3q^2}{2c} = \Delta + \eta q + \frac{1}{6} \eta^2 c. \quad (4.11)$$

Из этих формул нетрудно видеть, что домножение полей на вертекс  $e^{\eta\phi}$  соответствует изоморфизму (4.5). Действие этого изоморфизма мы будем обозначать как  $U_\eta$ . Физические состояния в NS-секторе являются пространственно-временными бозонами, а в R-секторе – соответственно фермионами. Тот факт, что спектральный поток при  $\eta = \pm 1/2$  переводит NS-сектор и R-сектор друг в друга, наводит на мысль, что соответствующий вертексный оператор  $e^{\eta\phi}$  является суперзарядом или, по крайней мере, его составляющим. Ниже мы покажем, что это действительно так.



В  $N = 2$  суперконформной алгебре имеется ограничение на размерности  $\Delta$  полей с  $U(1)$ -зарядом  $q$ . Для произвольного поля  $\Phi$  в NS-секторе напишем

$$|G_{-1/2}^{\mp}|\Phi\rangle|^2 + |G_{1/2}^{\pm}|\Phi\rangle|^2 = \langle\Phi|\{G_{1/2}^{\pm}, G_{-1/2}^{\mp}\}|\Phi\rangle = (2\Delta \pm q)\langle\Phi|\Phi\rangle \geq 0. \quad (4.12)$$

Отсюда следует, что в унитарной теории в NS-секторе выполняется неравенство

$$2\Delta \geq |q|. \quad (4.13)$$

Поля, для которых  $2\Delta = q$  или  $2\Delta = -q$ , называются *киральными* или *антикиральными примарными полями* соответственно<sup>2)</sup>. Как следует из (4.12), примарное киральное поле  $\Phi$  удовлетворяет соотношению

$$G_{1/2}^{-}\Phi = G_{-1/2}^{+}\Phi = 0. \quad (4.14)$$

Используя (4.14), соотношения суперконформной алгебры, а также ограничение на размерности  $2\Delta \geq |q|$ , можно показать, что  $\Phi$  уничтожается всеми положительными модами токов  $G^{\pm}(z)$ ,  $T(z)$ ,  $J(z)$ . Вместе с (4.14) это дает

$$\begin{aligned} L_n\Phi = J_n\Phi = 0, & \quad n > 0, \\ G_r^{+}\Phi = 0, & \quad r \geq -\frac{1}{2}, \\ G_r^{-}\Phi = 0, & \quad r > 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Для антикирального примарного поля верны те же соотношения с заменой  $G^{+} \leftrightarrow G^{-}$ .

Так как  $N = 2$  суперконформная алгебра имеет  $N = 1$  подалгебру, то в R-секторе имеется ограничение на размерность  $\Delta \geq c/24$ . Оно следует из неравенства (3.9). Также из (3.9) следует, что рамоновское поле  $\Phi$  с размерностью  $\Delta = c/24$  должно удовлетворять уравнению

$$G_0\Phi = 0. \quad (4.16)$$

Вследствие ограничения на размерность  $\Delta \geq c/24$  поле  $\Phi$  также уничтожается всеми положительными модами токов  $G^{\pm}(z)$ ,  $T(z)$ ,  $J(z)$ . Используя коммутационные соотношения  $N = 2$  алгебры, можно показать, что если поле уничтожается модой  $G_0 = (G_0^{+} + G_0^{-})/\sqrt{2}$ , то оно уничтожается модами  $G_0^{\pm}$  по отдельности. Это дает

$$\begin{aligned} L_n\Phi = J_n\Phi = 0, & \quad n > 0, \\ G_n^{\pm}\Phi = 0, & \quad n \geq 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Оказывается, что действие спектрального потока  $U_{\pm 1/2}$  переводит киральные и антикиральные примарные поля в рамоновские вакуумы и обратно. Действительно, из формул (4.5) с  $n = 0$  легко найти действие спектрального потока на эти поля:

$$U_{1/2} \left| \begin{array}{l} \Delta = \frac{q}{2} \\ Q = q \end{array} \right\rangle_{\text{NS}} = \left| \begin{array}{l} \Delta = \frac{c}{24} \\ Q = q - \frac{c}{6} \end{array} \right\rangle_{\text{R}}, \quad U_{-1/2} \left| \begin{array}{l} \Delta = \frac{q}{2} \\ Q = -q \end{array} \right\rangle_{\text{NS}} = \left| \begin{array}{l} \Delta = \frac{c}{24} \\ Q = -q + \frac{c}{6} \end{array} \right\rangle_{\text{R}}. \quad (4.18)$$

Соотношения (4.18) важны в теории струн, поскольку, как будет объяснено ниже, вертексы безмассовых бозонов являются киральными полями, а вертексы безмассовых фермионов – рамоновскими вакуумами. Соотношения (4.18) показывают, что безмассовые состояния образуют супермультиплет.

<sup>2)</sup>Мы иногда будем писать киральное поле, имея в виду киральное или антикиральное примарное поле.

### 5. $N = 2$ СУПЕРКОНФОРМНАЯ СИММЕТРИЯ ДЛЯ СТРУНЫ НЕВЁ–ШВАРЦА–РАМОНА

Как мы уже упоминали выше, материальный и духовый секторы струны Невё–Шварца–Рамона в десяти измерениях обладают  $N = 2$  суперконформной симметрией. В этом разделе мы их явно опишем. Также мы приведем стандартные формулы для бозонизаций, в которых  $U(1)$ -ток примет простой вид.

**5.1. Материальный сектор.** Выберем другой базис в пространстве материальных полей:

$$\begin{aligned} \psi_0^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm\psi_0 + \psi^1), & \psi_k^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^{2k} \pm i\psi^{2k+1}), \\ X_0^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm X_0 + X^1), & X_k^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X^{2k} \pm iX^{2k+1}). \end{aligned} \tag{5.1}$$

В этом базисе имеют место следующие операторные разложения:

$$\psi_a^+(z)\psi_b^-(0) \sim \frac{\delta_{ab}}{z}, \tag{5.2}$$

$$\partial X_a^+(z)\partial X_b^-(0) \sim -\frac{\delta_{ab}}{z^2}. \tag{5.3}$$

Остальные операторные разложения регуляры. Суперток в этом базисе запишется как

$$G^m = i\psi^\mu \partial X_\mu = \sum_k i\psi_k^+ \partial X_k^- + \sum_k i\psi_k^- \partial X_k^+. \tag{5.4}$$

Нетрудно убедиться, что, если выбрать токи  $G_\pm^m$  как

$$G^m = \frac{1}{\sqrt{2}}(G_+^m + G_-^m), \quad G_+^m = \sum_k i\sqrt{2}\psi_k^+ \partial X_k^-, \quad G_-^m = \sum_k i\sqrt{2}\psi_k^- \partial X_k^+ \tag{5.5}$$

и  $U(1)$ -ток

$$J^m = \sum_k \psi_k^+ \psi_k^-, \tag{5.6}$$

то они вместе с  $T^m$  удовлетворяют соотношениям  $N = 2$  суперконформной алгебры с центральным зарядом  $c_m = 15$ .

В дальнейшем нам будет удобно пользоваться бозонизацией  $\psi_\mu$ . Десять фермионов  $\psi_\mu$  можно реализовать с помощью пяти независимых бозонов  $H_k$ . Эти бозоны имеют следующие операторные разложения:

$$H_a(z)H_b(0) \sim -\delta_{ab} \ln z, \tag{5.7}$$

где  $a, b = 1, \dots, 5$ . Прямым вычислением можно убедиться, что фермионы, построенные по формулам

$$\psi_k^\pm = e^{\pm iH_k}, \tag{5.8}$$

имеют операторные разложения (5.2). При этом тензор энергии-импульса фермионов переписывается как

$$T_\psi = i\psi_\mu \partial \psi^\mu = -\frac{1}{2} \sum_k \partial H_k \partial H_k. \tag{5.9}$$

Заметим также, что рамоновские вакуумы в терминах бозонов  $H_k$  имеют простой вид

$$S_\alpha = \exp \left[ \sum_k i s_k H_k \right], \quad (5.10)$$

где  $s_k = \pm 1/2$ . Число различных независимых комбинаций  $s_k$  равно 32, как и независимых поляризации 32-компонентного спинора. Также, используя формулу (5.9), можно найти размерность этих полей. Она равна  $5/8 = c_m/24$ , как и должно быть для рамоновского вакуума.

Наконец, переписем  $U(1)$ -ток в терминах  $H_k$ . Используя равенство (в котором нет суммирования)

$$\psi_k^+ \psi_k^- = i \partial H_k, \quad (5.11)$$

получим

$$J^m = \partial H^m, \quad (5.12)$$

где

$$H^m = \sum_k i H_k. \quad (5.13)$$

Заметим, что выбор  $N = 2$  алгебры неоднозначен. Мы могли бы выбрать другой  $U(1)$ -ток

$$J^m = \psi_\mu \Lambda_{\mu\nu} \psi_\nu, \quad (5.14)$$

где  $\Lambda_{\mu\nu}$  – невырожденная антисимметричная матрица с собственными значениями  $\pm 1$ , а токи  $G_\pm^m$  – части  $G^m$  с зарядами  $\pm 1$  относительно  $J^m$  соответственно. Преобразованием Лоренца можно привести этот ток к виду (5.13). Как будет ясно из дальнейшего, разный выбор  $N = 2$  алгебры соответствует разным поляризациям суперзаряда  $Q_\alpha$ , который является 16-компонентным спинором.

**5.2. Духовый сектор.** Как было замечено в работе [9], система духов обладает  $N = 2$  суперконформной симметрией. Мы покажем, что спектральный поток  $N = 2$  суперконформной алгебры в системе духов является частью полного спектрального потока, который осуществляет отображение фермионов в бозоны и наоборот.

Выберем  $G_\pm^{\text{gh}}$  как

$$G^{\text{gh}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(G_+^{\text{gh}} + G_-^{\text{gh}}), \quad G_+^{\text{gh}} = \sqrt{2} \partial \beta c + \frac{3}{\sqrt{2}} \beta \partial c, \quad G_-^{\text{gh}} = -2\sqrt{2} b \gamma, \quad (5.15)$$

и  $U(1)$ -ток в виде

$$J^{\text{gh}} = 2bc + 3\beta\gamma. \quad (5.16)$$

Прямым вычислением можно убедиться, что вместе с тензором энергии-импульса  $T^{\text{gh}}$  эти токи удовлетворяют  $N = 2$  суперконформной алгебре с центральным зарядом  $c_{\text{gh}} = -15$ .

Так же, как и поля  $\psi_\mu$ , духи  $b, c$  можно реализовать, используя бозонизацию. Введем бозон  $\sigma$  с операторным разложением

$$\sigma(z)\sigma(0) \sim \ln z. \quad (5.17)$$

Построим духи  $b, c$  по формулам

$$c = e^\sigma, \quad b = e^{-\sigma}. \quad (5.18)$$

Духи  $\beta, \gamma$  можно переписать, используя два бозонных поля  $\phi, \chi$  с операторными разложениями

$$\phi(z)\phi(0) \sim -\ln z, \quad \chi(z)\chi(0) \sim \ln z. \quad (5.19)$$

Духи  $\beta, \gamma$  строятся по формулам

$$\beta = e^{-\phi+\chi}\partial\chi, \quad \gamma = e^{\phi-\chi}. \quad (5.20)$$

Можно убедиться, что построенные таким образом экспоненты имеют требуемые операторные разложения (3.13).

Тензор энергии-импульса духов переписывается как

$$T^{\text{gh}} = T_\phi + T_\chi + T_\sigma, \quad (5.21)$$

где

$$T_\phi = -\frac{1}{2}\partial\phi\partial\phi - \partial^2\phi, \quad T_\chi = \frac{1}{2}\partial\chi\partial\chi + \frac{1}{2}\partial^2\chi, \quad T_\sigma = \frac{1}{2}\partial\sigma\partial\sigma + \frac{3}{2}\partial^2\sigma. \quad (5.22)$$

Вертексные операторы  $V_q$ , соответствующие разным вакуумам  $(\beta, \gamma)$ -системы, в терминах  $\phi$  имеют вид

$$V_q = e^{q\phi}. \quad (5.23)$$

Прямым вычислением можно убедиться, что слияние экспонент  $e^{q\phi}$  с полями  $\beta, \gamma$  дает нужные степени  $z$  в соотношениях (3.17). Используя (5.22), можно найти размерность этого поля  $\Delta(e^{q\phi}) = -(q^2 + 2q)/2$ .

Из формул

$$\beta\gamma = \partial\phi, \quad bc = -\partial\sigma \quad (5.24)$$

находим, что после бозонизации  $U(1)$ -ток примет вид

$$J^{\text{gh}} = \partial H^{\text{gh}}, \quad (5.25)$$

где

$$H^{\text{gh}} = 3\phi - 2\sigma. \quad (5.26)$$

**5.3.  $N = 2$  суперконформная алгебра в струне Невё–Шварца–Рамона и суперзаряд.** Как следует из п. 5.1, 5.2,  $N = 2$  суперконформная алгебра имеется в системе духов и материи. Полные токи имеют вид

$$T^{\text{tot}} = T^{\text{m}} + T^{\text{gh}}, \quad G_\pm^{\text{tot}} = G_\pm^{\text{m}} + G_\pm^{\text{gh}}, \quad J^{\text{tot}} = J^{\text{m}} + J^{\text{gh}}. \quad (5.27)$$

После бозонизации полный  $U(1)$ -ток примет вид

$$J^{\text{tot}} = \partial H^{\text{tot}} = \partial H^{\text{m}} + \partial H^{\text{gh}} = \sum_k i\partial H_k + 3\partial\phi - 2\partial\sigma. \quad (5.28)$$

Как уже обсуждалось в разделе 4, спектральный поток можно реализовать с помощью вертексного оператора от бозонизации  $U(1)$ -тока. Более того, при полуцелом параметре спектрального потока  $\eta$  он переводит NS-сектор и R-сектор друг в друга и соответственно является естественным кандидатом на роль оператора суперсимметрии. Напишем соответствующий оператор для полной  $N = 2$  суперконформной алгебры при параметре  $\eta = -1/2$ :

$$Q(z) = U_{-1/2} = e^{-H^{\text{tot}}/2}. \quad (5.29)$$

Используя выражение для  $H^{\text{tot}}$  через бозоны, можно написать его более явно:

$$Q(z) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_k iH_k - \frac{3}{2}\phi + \sigma\right) = cS_\alpha e^{-3\phi/2}, \quad (5.30)$$

где в последнем равенстве мы перешли от бозонизации к начальным полям,  $S_\alpha$  – спиновое поле со всеми спинами вниз.

Заметим, что вертексный оператор безмассового фермиона в картине  $-3/2$  имеет вид

$$V_{-3/2} = cu^\alpha S_\alpha e^{-3\phi/2} e^{ikX}, \quad (5.31)$$

где  $u^\alpha$  – поляризация, которая должна удовлетворять уравнению Дирака, как это следует из (3.12). Заметим, что вертекс  $Q(z)$  является вертексом  $V_{-3/2}(z)$  при импульсе  $k_\mu$ , равном нулю. При нулевом импульсе уравнение Дирака тривиально выполняется и  $u^\alpha$  становится произвольным спинором, который может быть опущен. Это аналогично построению суперзаряда в статьях [8], [10], где оператор суперсимметрии оказывался вертексным оператором фермиона при нулевом импульсе. В этих работах он был в картине  $-1/2$ .

Вертекс (5.31) умножен на дух  $c(z)$ , в корреляционных функциях он соответствует вертексному оператору с фиксированной координатой. Как обычно в теории струн, вертексы в корреляционных функциях нужно либо умножать на дух  $c(z)$ , при этом корреляционная функция не будет зависеть от координаты  $z$ , либо интегрировать по координате. По аналогии мы заменим дух  $c(z)$  в (5.30) на интеграл по  $z$  и будем понимать его действие на вертекс физического состояния как интеграл по контуру вокруг вертекса. Соответственно, оператор суперзаряда примет вид

$$Q_\alpha = \int dz S_\alpha e^{-3\phi/2}. \quad (5.32)$$

Прямым вычислением можно убедиться, что этот оператор имеет конформную размерность 0 и является БРСТ-замкнутым.

Мы завершим этот раздел парой замечаний. Во-первых, мы получили суперзаряд со всеми спинами вниз. Преобразованием Лоренца или, что то же самое, выбором другой  $N = 2$  алгебры в материальном секторе мы можем получить остальные его компоненты. В результате получится 16-компонентный вейлевский спинор. Во-вторых, при реализации спектрального потока в разделе 4 мы неявно пользовались тем, что центральный заряд не равен нулю. Например, как видно из формул (4.6), при  $c = 0$  нельзя записать  $U(1)$ -ток как производную от свободного бозона. Тем не менее эта трудность является чисто технической и легко обходится. Например, можно рассматривать спектральный поток, построенный в этом разделе, как последовательное применение спектральных потоков в материи и в духах, для которых центральный заряд не равен нулю. Также можно провести рассуждения, аналогичные приведенным в разделе 4, но бозонизовать  $U(1)$ -ток не одним, а двумя бозонами  $J^{\text{tot}} = \partial H^{\text{m}} + \partial H^{\text{gh}}$ . Что мы сейчас и сделаем.

Отметим сначала, что, в отличие от случая  $c \neq 0$ , экспоненты вида  $e^{\alpha H^{\text{tot}}}$  являются нейтральными относительно тока  $J^{\text{tot}}$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \partial H^{\text{tot}} e^{\alpha H^{\text{tot}}} &= \left( 3\partial\phi - 2\partial\sigma + \sum_k i\partial H_k \right) \exp \left[ \alpha \left( 3\phi - 2\sigma + \sum_k iH_k \right) \right] \\ &= (-9 + 4 + 5) e^{\alpha H^{\text{tot}}} = 0. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Значит, мы не можем сделать операторы нейтральными, выделяя из них  $U(1)$ -часть. Это немного отличает наш случай и является следствием равенства центрального заряда нулю.

Однако можно поступить следующим образом. Мы будем делать токи нейтральными относительно полного  $U(1)$ -тока, выделяя из него духовые и материальные  $U(1)$ -составляющие по отдельности. Выделим эти  $U(1)$ -составляющие из  $G^\pm$ :

$$G_{\pm}^{\text{tot}} = \widehat{G}_{\pm}^{\text{m}} e^{\pm H_{\text{m}}/5} + \widehat{G}_{\pm}^{\text{gh}} e^{\mp H_{\text{gh}}/5}. \quad (5.34)$$

Здесь и далее операторы со шляпкой являются нейтральными относительно обоих токов. Эта формула является модификацией соответствующей формулы в разделе 4. Рассмотрим теперь произвольное поле  $V$ , которое имеет заряд  $q_{\text{m}}$  относительно  $\partial H^{\text{m}}$  и заряд  $q_{\text{gh}}$  относительно  $\partial H^{\text{gh}}$ . Выделим из него заряженные части:

$$V = \widehat{V} e^{q_{\text{m}} H_{\text{m}}/5 - q_{\text{gh}} H_{\text{gh}}/5}. \quad (5.35)$$

Этот оператор имеет заряд  $q_{\text{m}} + q_{\text{gh}}$  относительно  $\partial H^{\text{tot}}$ . Знаки в экспонентах перед  $H^{\text{m}}$  и  $H^{\text{gh}}$  разные, из-за того что центральные заряды  $c_{\text{m}} = 15$  и  $c_{\text{gh}} = -15$  разного знака. Теперь сделаем преобразование спектрального потока этого оператора с помощью  $e^{\eta H}$ :

$$V_{\eta} = \widehat{V} \exp \left\{ \frac{1}{5} (5\eta + q_{\text{m}}) H^{\text{m}} + \frac{1}{5} (5\eta - q_{\text{gh}}) H^{\text{gh}} \right\}. \quad (5.36)$$

Считая операторное разложение с  $G^\pm$ , легко убедиться, что оно будет разлагаться по степеням  $(z - w)^{n \pm \eta}$ . Также понятно, что полный заряд этого поля не зависит от  $\eta$ ,

$$q' = q = q_{\text{m}} + q_{\text{gh}}, \quad (5.37)$$

поскольку, как мы показали выше, оператор  $e^{\eta H^{\text{tot}}}$  нейтрален относительно  $U(1)$ -тока  $\partial H^{\text{tot}}$ . Найдем конформную размерность поля  $V_{\eta}$ :

$$\Delta' = \Delta - \frac{1}{10} (5\eta - q_{\text{gh}})^2 + \frac{1}{10} (5\eta - q_{\text{m}})^2 + \frac{1}{10} q_{\text{gh}}^2 - \frac{1}{10} q_{\text{m}}^2 = \Delta + \eta q. \quad (5.38)$$

Все эти вычисления в итоге показывают, что оператор  $e^{\eta H^{\text{tot}}}$  осуществляет преобразование спектрального потока (4.5) с  $c = 0$ .

## 6. GSO-ПРОЕКЦИЯ И ДЕЙСТВИЕ СУПЕРЗАРЯДА

В п. 5.3 мы построили оператор  $Q_{\alpha}$ , который имеет конформную размерность 0 и коммутирует с БРСТ-оператором  $Q_B$ . Однако этого недостаточно, для того чтобы он действовал на физические (БРСТ-замкнутые) вертексы. Необходимо оставить только такие физические вертексы, на которых корректно определено действие оператора  $Q_{\alpha}$ . Рассмотрим произвольный вертекс. Он должен иметь вид

$$P(\partial X_{\mu}, \partial H_k, \partial \sigma, \partial \phi, \partial \chi) \exp \left[ l\phi + r\chi + m\sigma + \sum_k i s_k H_k + i k_{\mu} X^{\mu} \right], \quad (6.1)$$

где  $P$  – некоторый полином от своих аргументов, для дальнейшего его вид не важен.

Напомним, что в R-секторе  $l, s_k \in \mathbb{Z} + 1/2$ , а в NS-секторе  $l, s_k \in \mathbb{Z}$ . В обоих секторах  $r, m \in \mathbb{Z}$ .

При обходе подынтегрального выражения в (5.32) вокруг этого вертекса возникает фаза

$$2\pi i \left( \frac{3l}{2} - \frac{1}{2} \sum_k s_k \right). \quad (6.2)$$

Для того чтобы не возникало разрывов и интеграл при действии суперзаряда был хорошо определен, должно выполняться условие взаимолокальности физического вертекса (6.1) и супертока (5.32)

$$\frac{3l}{2} - \frac{1}{2} \sum s_k \in \mathbb{Z}. \quad (6.3)$$

Это требование оставляет в каждом секторе лишь такие вертексы, которые удовлетворяют условию (6.3).

Покажем, что это условие эквивалентно GSO-проекции. Напомним, что GSO-проекция по определению [2] оставляет в спектре струны только состояния с собственными значениями 1 оператора  $(-1)^F$ , где  $F$  – фермионное число. По определению фермионное число  $F_{\text{gh}}$  экспоненты  $e^{l\phi}$  равно  $l$ . А в материальном секторе фермионное число определяется как

$$F_m = \int dz \sum_k \Sigma_{2k, 2k+1}(z) = \int dz \sum_k \psi_{2k} \psi_{2k+1} = \int dz \sum_k i\partial H_k, \quad (6.4)$$

где  $\Sigma_{\mu\nu}$  – фермионная часть оператора преобразования Лоренца. Полное фермионное число равно их сумме  $F = F_m + F_{\text{gh}}$ .

При действии на экспоненту вида (6.1) оператор  $F = F_{\text{gh}} + F_m$  будет давать

$$l + \sum_k s_k. \quad (6.5)$$

Для того чтобы оператор  $(-1)^F$  при действии на физические состояния был равен единице, должно выполняться условие

$$l + \sum_k s_k \in 2\mathbb{Z}, \quad (6.6)$$

которое эквивалентно условию (6.3). Действительно, если поделить его на 2 и сложить с (6.3), то получится

$$2l \in \mathbb{Z}, \quad (6.7)$$

что, очевидно, выполняется, так как  $l$  – как минимум полуцелое число.

Из эквивалентности (6.3) и GSO-проекции следует стандартное утверждение о равенстве числа физических состояний бозонов и фермионов, которое равносильно обращению в нуль однопетлевой поправки к энергии вакуума.

Приведем несколько примеров применения проекции (6.3) к физическим состояниям. Вертекс тахиона имеет вид

$$V = e^{ikX} e^{-\phi}, \quad k^2 = \frac{1}{2}, \quad (6.8)$$

для него левая часть выражения (6.3) равна  $3/2$ . Поскольку число  $3/2$  не является целым, тахион отсутствует в спектре после редукции.

Вертекс безмассового фермиона имеет вид

$$V = u^\alpha S_\alpha e^{ikX} e^{-\phi/2} = u^\alpha \exp \left[ \sum s_k H_k \right] e^{ikX} e^{-\phi/2}, \quad k^2 = 0, \quad (6.9)$$

где значениям  $s_k = \pm 1/2$  соответствуют поляризации спинора  $\alpha$ . Условие (6.3) для этого вертекса имеет вид

$$-\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \sum_k s_k \in \mathbb{Z}. \quad (6.10)$$

Оно означает, что нечетное число спинов  $s_k$  должно быть направлено вверх. Это оставляет 16-компонентный вейлевский спинор от 32-компонентного дираковского спинора.

Вертекс безмассового бозона имеет вид

$$V = \xi_\mu \psi^\mu e^{ikX} e^{-\phi}, \quad k^2 = 0. \quad (6.11)$$

Для члена  $\xi_\mu \psi^\mu$  сумма  $\sum_k s_k$  равна  $\pm 1$  (или, точнее говоря, он разбивается на сумму двух составляющих с зарядом 1 и  $-1$ ). Соответственно, условие (6.3) принимает вид

$$-\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}. \quad (6.12)$$

Оно выполнено для обоих знаков, и все физические вертексы вида (6.11) присутствуют в спектре после редукции.

В итоге после редукции в спектре на безмассовом уровне остаются вейлевский фермион и векторный бозон.

Итак, требование отсутствия разрывов при действии оператора  $Q_\alpha$  на физические состояния приводит к GSO-проекции этого пространства. Из этого ясно, что GSO-проекция необходима для существования самой возможности определения оператора пространственно-временной суперсимметрии.

## 7. БЕЗМАССОВЫЕ СОСТОЯНИЯ ПРИ $D = 10$

**7.1. Вертексные операторы.** Вертексные операторы в NS-секторе в картине  $-1$  имеют вид

$$V_{-1} = c \xi_\mu \psi^\mu e^{ikX} e^{-\phi}, \quad (7.1)$$

где  $\xi_\mu$  – поляризация.

Заметим, что как материальная часть  $\psi_\mu$ , так и духовая часть<sup>3)</sup>  $ce^{-\phi}$  являются киральными полями по отношению к  $N = 2$  суперконформной алгебре. С другой стороны, вертекс фермиона в картине  $-1/2$  имеет вид

$$V_{-1/2} = u^\alpha S_\alpha e^{ikX} e^{-\phi/2}. \quad (7.2)$$

Заметим, что материальная часть  $S_\alpha$  имеет размерность  $5/8$  и является рамоновским вакуумом, как и  $ce^{-\phi/2}$  в духовом секторе. Условие GSO-проекции требует, чтобы  $S_\alpha$  было правым вейлевским спинором.

Итак, как было отмечено выше, вертексы безмассовых частиц реализуются киральными полями и рамоновскими вакуумами. Они преобразуются друг в друга операторами пространственно-временной суперсимметрии, образуя супермультиплет. То же самое остается верным и после компактификации.

**7.2. Действие суперзаряда.** Как следует из формул (4.18), под действием спектрального потока киральные поля и рамоновские вакуумы, которые соответствуют безмассовым бозонам и фермионам, преобразуются друг в друга. Как мы показали в п. 5.3, оператор суперсимметрии является в точности спектральным потоком. Формулы (4.18) показывают, что оператор суперзаряда переводит бозоны и фермионы друг в друга. Напишем явно действие суперзаряда на безмассовые состояния.

<sup>3)</sup>Духовый сектор не является унитарной теорией. Поэтому соотношения (3.9) и (4.12) для нее не работают. Мы примем соотношения (4.15) и (4.17) в качестве определения киральных и рамоновских полей.



Для этого удобно написать суперзаряд и вертексные операторы в разных картинах. Приведем без вычисления соответствующие формулы. Суперзаряд имеет вид

$$\begin{aligned} Q_\alpha^{(1/2)} &= \int dz e^{\phi/2} (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} S'_\beta \partial X_\mu, \\ Q_\alpha^{(-1/2)} &= \int dz e^{-\phi/2} S_\alpha, \\ Q_\alpha^{(-3/2)} &= \int dz e^{-3\phi/2} S'_\alpha, \end{aligned} \quad (7.3)$$

здесь и далее  $S_\alpha$  обозначает правый вейлевский спинор,  $S'^\beta$  – левый. Вертексные операторы для бозона

$$V_0 = \xi_\mu (\partial X^\mu + i(k\psi)\phi^\mu) e^{ikX}, \quad V_{-1} = \xi_\mu \psi^\mu e^{ikX}, \quad (7.4)$$

для фермиона

$$\begin{aligned} V_{1/2} &= u^\alpha (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} S'_\beta \left( \partial X + \frac{i}{2} (k\psi)\psi_\mu \right) e^{ikX} e^{\phi/2}, \\ V_{-1/2} &= u^\alpha S_\alpha e^{ikX} e^{-\phi/2}, \quad V_{-3/2} = u^\alpha S'_\alpha e^{ikX} e^{-3\phi/2}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

С помощью этих формул можно убедиться, что выполнены с точностью до коэффициентов равенства

$$\begin{aligned} [v^\alpha Q_\alpha, V_{\text{NS}}(\xi, k)] &= V_{\text{R}}(k^\mu \xi^\nu (\gamma_{\mu\nu})^\alpha_\beta v^\beta, k), \\ [v^\alpha Q_\alpha, V_{\text{R}}(u, k)] &= V_{\text{NS}}(u^\alpha (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} v^\beta, k), \end{aligned} \quad (7.6)$$

где мы опустили номера картин, так как это верно во всех картинах.

## 8. КОМПАКТИФИЦИРОВАННАЯ СТРУНА

Мы не будем приводить аналогичные вычисления в случае компактифицированной струны, так как они достаточно полно и ясно представлены в литературе (см., например, [3]). Тем не менее мы опишем, как приведенная выше конструкция обобщается на эти модели.

Для того чтобы после компактификации суперструны сохранилась  $N = 1$  пространственно-временная суперсимметрия, необходимо и достаточно [11], [16], чтобы после компактификации сохранилась  $N = 2$  суперконформная симметрия на мировом листе. Поскольку духи и свободная пространственно-временная часть обладают  $N = 2$  суперконформной симметрией, необходимо, чтобы компактная часть обладала  $N = 2$  суперконформной симметрией. При этом суперзаряд строится как спектральный поток в этих трех составляющих. Он будет иметь вид  $e^{-H^{\text{tot}}/2} = e^{-(H^{\text{gh}} + H^{\text{sp-t}} + H^{\text{int}})/2}$ , где  $H^{\text{gh}}$ ,  $H^{\text{sp-t}}$ ,  $H^{\text{int}}$  – бозонизации  $U(1)$ -токов для духовой, пространственно-временной и компактной составляющих  $N = 2$  суперконформной симметрии.

Также в случае компактификации верно утверждение, что материальная часть вертекса безмассового бозона в картине  $-1$  должна быть киральным полем с полным  $U(1)$ -зарядом, равным по модулю единице. Материальная часть вертекса безмассового фермиона в картине  $-1/2$  должна быть рамоновским вакуумом. Чтобы обеспечить это требование, как легко показать, необходимо, чтобы оно было выполнено по отдельности как в пространственно-временном четырехмерном секторе, так и в компактном секторе с полным центральным зарядом, равным 9.

## 9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что скрытая  $N = 2$  суперконформная симметрия, которая имеет место в десятимерной струне Невё–Шварца–Рамона, как в материальном, так и в духовом секторе до компактификации обеспечивает возможность того же механизма получения пространственно-временной суперсимметрии, который был предложен Геннером при компактификации шести измерений. А именно, спектральный поток  $N = 2$  суперконформной алгебры позволяет построить биекцию между бозонными (NS) и фермионными (R) секторами при условии ограничения пространства физических состояний на подпространства локальных относительно оператора спектрального потока состояний. Это ограничение эквивалентно GSO-редукции.

Вертексы испускания безмассовых частиц соответствуют киральным полям с  $U(1)$ -зарядом, равным по модулю единице, для случая бозонов и рамоновским вакуумам для фермионов.

При этом действие спектрального потока объединяет вертексы безмассовых частиц в один супермультиплет.

**Благодарности.** Авторы благодарны Д. А. Полякову и С. Е. Пархоменко за полезные обсуждения и замечания.

### Список литературы

- [1] M. B. Green, J. H. Schwarz, E. Witten, *Superstring Theory*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987.
- [2] J. Polchinski, *String Theory*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.
- [3] R. Blumenhagen, D. Lüst, S. Theisen, *Basic Concepts of String Theory*, Springer, Berlin, 2013.
- [4] A. Neveu, J. H. Schwarz, *Nucl. Phys. B*, **31**:1 (1971), 86–112.
- [5] P. Ramond, *Phys. Rev. D*, **3**:10 (1971), 2415–2418.
- [6] F. Gliozzi, J. Scherk, D. I. Olive, *Phys. Lett. B*, **65**:3 (1976), 282–286.
- [7] F. Gliozzi, J. Scherk, D. I. Olive, *Nucl. Phys. B*, **122**:2 (1977), 253–290.
- [8] D. Friedan, S. H. Shenker, E. J. Martinec, *Phys. Lett. B*, **160**:1–3 (1985), 55–61.
- [9] D. Friedan, E. Martinec, S. Shenker, *Nucl. Phys. B*, **271**:1 (1986), 93–165.
- [10] V. G. Knizhnik, *Phys. Lett. B*, **160**:6 (1985), 403–407.
- [11] D. Gepner, *Nucl. Phys. B*, **296**:4 (1988), 757–778.
- [12] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **241**:2 (1984), 333–380.
- [13] E. P. Verlinde, H. L. Verlinde, “Lectures on string perturbation theory”, *Superstrings ’88* (Trieste, Italy, 11–19 April, 1988), eds. M. B. Green, M. Grisaru, R. Iengo, E. Sezgin, A. Strominger, World Sci., Singapore, 1989, 189–250.
- [14] A. Schwimmer, N. Seiberg, *Phys. Lett. B*, **184**:2–3 (1987), 191–196.
- [15] D. Gepner, “Lectures on  $N = 2$  string theory”, *Superstrings ’89* (Trieste, Italy, 3–11 April, 1989), eds. M. Green, R. Iengo, S. Randjbar-Daemi, E. Sezgin, A. Strominger, World Sci., Singapore, 1990, 238–302.
- [16] T. Banks, L. J. Dixon, D. Friedan, E. J. Martinec, *Nucl. Phys. B*, **299**:3 (1988), 613–626.