А. А. Белавин, В. Г. Дринфельд, О решениях классического уравнения Янга–Бакстера для простых алгебр Ли, *Функц. анализ и его прил.*, 1982, том 16, выпуск 3, 1–29

Функциональный анализ и его приложения,
1982, т. 16, вып. 3, 1—29.

УДК 517.43+519.46

О РЕШЕНИЯХ КЛАССИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЯНГА — БАКСТЕРА ДЛЯ ПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ

А. А. Белавин, В. Г. Дринфельд

§ 1. Введение

1.1. Классическим уравнением Янга — Бакстера называется функциональное уравнение

$$[X^{12}(u_1, u_2), X^{13}(u_1, u_3)] + [X^{12}(u_1, u_2), X^{23}(u_2, u_3)] + \\ + [X^{13}(u_1, u_3), X^{23}(u_2, u_3)] = 0 \qquad (1.1)$$

относительно функции $X(u_1, u_2)$, принимающей значения в $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Поясним смысл обозначений типа $X^{13}(u_1, u_3)$. Зафиксируем ассоциативную алгебру A с единицей, содержащую $\mathfrak{g}$. $X^{13}(u_1, u_3)$ — это, по определению, образ $X(u_1, u_3)$ при линейном отображении φ_{13}: $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to A \otimes A \otimes A$, заданном формулой $\varphi_{13}(a \otimes b) = a \otimes 1 \otimes b$. Аналогичный смысл имеют обозначения $X^{12}(u_1, u_2)$ и $X^{23}(u_2, u_3)$ (отметим лишь, что $\varphi_{12}(a \otimes b) \stackrel{\text{def}}{=} a \otimes b \otimes 1$, $\varphi_{23}(a \otimes b) \stackrel{\text{def}}{=} 1 \otimes a \otimes b$). Легко видеть, что каждое из трех слагаемых левой части (1.1) принадлежит $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ и не зависит от выбора A. Уравнение (1.1) играет важную роль в теории классических и квантовых интегрируемых систем (см. [1], [5]).

Заметим, что если $X(u_1, u_2)$ — решение уравнения (1.1), а $\varphi(u)$ — функция со значениями в Aut $\mathfrak{g}$, то $\tilde{X}(u_1, u_2) \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi(u_1) \otimes \varphi(u_2)) X(u_1, u_2)$ тоже является решением (1.1). Решения X и $\tilde{X}$ мы будем называть эквивалентными. Прежде, чем формулировать еще один способ размножения решений уравнения (1.1), введем следующее

Определение. Функция $X(u_1, u_2)$ называется инвариантной относительно $g \in \operatorname{Aut} \mathfrak{g}$, если $(g \otimes g) X(u_1, u_2) = X(u_1, u_2)$. Множество всех таких g называется группой инвариантности функции $X(u_1, u_2)$. Функция $X(u_1, u_2)$ называется инвариантной относительно $h \in \mathfrak{g}$, если $[h \otimes 1 + 1 \otimes h, X(u_1, u_2)] = 0$ (т. е. если она инвариантна относительно $e^{t \cdot \operatorname{ad} h}$ при любом t).

Второй способ размножения решений уравнения (1.1) заключается в следующем: если $X(u_1, u_2)$ — решение уравнения (1.1), инвариантное относительно подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, а тензор $\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$ удовлетворяет уравнениям

$$[r^{12}, r^{13}] + [r^{12}, r^{23}] + [r^{13}, r^{23}] = 0, \qquad (1.2)$$

$$r^{21} = -r^{12}, \qquad (1.3)$$

то функция $\tilde{X}(u_1, u_2) \stackrel{\text{def}}{=} X(u_1, u_2) + r$ тоже является решением (1.1). В этом легко убедиться прямым вычислением. Заметим, что если алгебра $\mathfrak{h}$ абелева, то уравнение (1.2) выполняется автоматически.

Часто на решения уравнения (1.1) налагают следующие дополнительные условия:

а) так называемое условие унитарности $X^{12}(u_1, u_2) = -X^{21}(u_2, u_1)$,

б) требование, чтобы функция $X(u_1, u_2)$ зависела только от $u_1 - u_2$ (в этом случае мы будем, допуская некоторую вольность, писать $X(u_1 - u_2)$ вместо $X(u_1, u_2)$).

Ясно, что свойство а) сохраняется при обоих рассмотренных выше способах размножения решений, а свойство б) сохраняется при втором способе, но не всегда при первом. Если $X(u_1 - u_2)$ — решение уравнения (1.1), то, вообще говоря, неясно, существует ли непостоянная функция $\varphi(u)$ со значениями в $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ такая, что функция $\tilde{X}(u_1, u_2) \overset{\text{def}}{=} (\varphi(u_1) \otimes \varphi(u_2)) X(u_1 - u_2)$ зависит только от $u_1 - u_2$. Если, однако, группа инвариантности G решения $X(u_1 - u_2)$ недискретна, то можно положить $\varphi(u) = e^{uP}$, где P — любой элемент алгебры Ли группы G. Например, если решение $X(u_1 - u_2)$ инвариантно относительно $h \in \mathfrak{g}$, то можно положить $\varphi(u) = e^{u \cdot \operatorname{ad} h}$.

Отметим, что для функций $X(u_1, u_2)$, зависящих только от $u_1 - u_2$, уравнение (1.1) записывается в виде

$$[X^{12}(u), X^{13}(u+v)] + [X^{12}(u), X^{23}(v)] + [X^{13}(u+v), X^{23}(v)] = 0, \quad (1.4)$$

а условие унитарности — в виде $X^{12}(u) = -X^{21}(-u)$.

1.2. В настоящей работе уравнение (1.4) исследуется в предположении, что $\mathfrak{g}$ — конечномерная простая алгебра Ли над $\mathbf{C}$. Кроме того, мы будем искать решения $X(u)$ в классе мероморфных функций, заданных в некотором круге $U \subset \mathbf{C}$ с центром в нуле и удовлетворяющих одному из следующих трех условий, эквивалентность которых будет доказана в § 2:

А) определитель матрицы, образованной координатами тензора $X(u)$, не равен нулю тождественно;

Б) функция $X(u)$ имеет хотя бы один полюс, и не существует подалгебры Ли $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$ такой, что $X(u) \in \mathfrak{g}' \otimes \mathfrak{g}'$ при любом u;

В) функция $X(u)$ имеет при $u = 0$ полюс первого порядка с вычетом вида $c \sum_\mu I_\mu \otimes I_\mu$, где $c \in \mathbf{C}$, $\{I_\mu\}$ — ортонормированный базис в $\mathfrak{g}$ относительно формы Киллинга.

Такие решения уравнения (1.4) будем называть *невырожденными*. Наш первый основной результат заключается в следующем.

Теорема 1.1. *Любое невырожденное решение $X(u)$ уравнения (1.4) удовлетворяет также условию унитарности и мероморфно продолжается на всю комплексную плоскость. Все полюса $X(u)$ простые. Они образуют дискретную подгруппу $\Gamma \subset \mathbf{C}$. Существует гомоморфизм A: $\Gamma \to \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ такой, что для любых $w \in \mathbf{C}$, $\gamma \in \Gamma$ $X(u+\gamma) = (A(\gamma) \otimes 1) X(u) = (1 \otimes A(\gamma)^{-1}) X(u)$. Если Γ имеет ранг 2, то ограничение A на некоторую подгруппу конечного индекса $\Gamma' \subset \Gamma$ тривиально, так что $X(u)$ — эллиптическая функция. Если Γ имеет ранг 1, то $X(u)$ эквивалентно решению $\tilde{X}(u)$ вида $f(e^{ku})$, где f — рациональная функция. Если $\Gamma = 0$, то $X(u)$ эквивалентно рациональному решению.*

Эта теорема доказывается в § 4 с помощью полученного в § 3 аналога классической теоремы Вейерштрасса о функциях, обладающих алгебраической теоремой сложения. В § 5 доказывается, что невырожденные решения уравнения (1.4) в эллиптических функциях существуют только при $\mathfrak{g} = sl(n)$ и что все они исчерпываются решениями, найденными в [1]. В § 6 мы находим все невырожденные решения уравнения (1.4) вида $X(u) = f(e^{ku})$, где f — рациональная функция (такие решения мы называем тригонометрическими). Оказывается, что с точностью до описанных в пункте 1.1 способов размножения решений и таких тривиальных преобразований, как умножение решения на число и замена u на cu, число невырожденных тригонометрических решений уравнения (1.4) конечно.

Кроме того, мы показываем, что простейшие тригонометрические решения являются классическими r-матрицами (в смысле [5], с. 141), соответствующими цепочкам Тоды — Богоявленского [10].

К сожалению, нам не удалось получить существенных результатов о рациональных решениях уравнения (1.4). Даже задача нахождения рациональных решений, не имеющих полюса на бесконечности, представляется весьма сложной. Нам удалось найти лишь некоторые способы построения таких решений. Эти способы приведены в § 7.

§ 2. Эквивалентность трех определений невырожденности

2.1. Напомним, что $\mathfrak{g}$ обозначает конечномерную простую алгебру Ли над $\mathbf{C}$. Зафиксируем невырожденную инвариантную билинейную форму на $\mathfrak{g}$. Выберем в $\mathfrak{g}$ базис $\{I_\mu\}$, ортонормированный относительно этой формы, и положим $t = I_\mu \otimes I_\mu$ (здесь и в дальнейшем подразумевается суммирование по одинаковым индексам). Легко видеть, что t не зависит от выбора $\{I_\mu\}$. Пусть $X(u)$ — мероморфное решение уравнения (1.4), определенное в некотором круге $U \subset \mathbf{C}$, содержащем 0.

Предложение 2.1. *Допустим, что* 1) *функция* $X(u)$ *имеет хотя бы один полюс,* 2) *не существует подалгебры Ли* $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$, *отличной от* $\mathfrak{g}$ *и такой, что* $X(u) \in \mathfrak{g}' \otimes \mathfrak{g}'$ *при любом* u. *Тогда* а) *все полюсы* $X(u)$ *простые,* б) *функция* $X(u)$ *имеет полюс при* $u = 0$ *с вычетом вида* ct, $c \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$.

Доказательство. Пусть $X(u)$ имеет при $u = \gamma$ полюс порядка k, положим $\tau = \lim\limits_{k \to \gamma} (u - \gamma)^k X(u)$. Умножив обе части уравнения (1.4) на $(v - \gamma)^k$ и устремив v к γ, получим

$$[X^{12}(u), \tau^{23}] + [X^{13}(u + \gamma), \tau^{23}] = 0. \tag{2.1}$$

Точно так же, устремив в уравнении (1.4) u к γ, получим

$$[\tau^{12}, X^{13}(v + \gamma)] + [\tau^{12}, X^{23}(v)] = 0. \tag{2.2}$$

Лемма. $[\tau^{12}, \tau^{13}] \neq 0$.

Доказательство. Пусть $V \subset \mathfrak{g}$ — наименьшее векторное пространство такое, что $\tau \in V \otimes \mathfrak{g}$. Положим $\mathfrak{g}' = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, V] \subset V\}$. Ясно, что $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$ — подалгебра Ли. Так как $[X^{13}(u + \gamma), \tau^{23}] \in \mathfrak{g} \otimes V \otimes \mathfrak{g}$, то из (2.1) следует, что $[X^{12}, \tau^{23}] \in \mathfrak{g} \otimes V \otimes \mathfrak{g}$, т. е. $X(u) \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}'$. Точно так же из (2.2) выводится, что $X(v + \gamma) \in \mathfrak{g}' \otimes \mathfrak{g}$ при любом v. Таким образом, $X(u) \in \mathfrak{g}' \otimes \mathfrak{g}'$ при любом u. Следовательно, $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$, т. е. $[\mathfrak{g}, V] \subset V$. Отсюда и из простоты $\mathfrak{g}$ следует, что $V = \mathfrak{g}$. Поэтому $[\tau^{12}, \tau^{13}] \neq 0$.

Из леммы следует, что функция $X(u)$ имеет при $u = 0$ полюс порядка не меньше, чем k: в противном случае, устремив в равенстве (2.2) v к нулю, имели бы $[\tau^{12}, \tau^{13}] = 0$. Остается доказать, что порядок полюса $X(u)$ при $u = 0$ не превосходит единицы и $\lim\limits_{u \to 0} uX(u) = ct$.

Пусть

$$X(u) = \frac{\theta}{u^l} + \frac{A}{u^{l-1}} + \sum_{i=2-l}^{\infty} X_i u^i, \quad \theta \neq 0.$$

Если $l > 1$, то зафиксировав v и приравняв к нулю коэффициент при u^{1-l} ряда Лорана в точке $u = 0$ левой части (1.4), получим

$$[A^{12}, X^{13}(v) + X^{23}(v)] + \left[\theta^{12}, \frac{dX^{13}(v)}{dv}\right] = 0.$$

Устремив теперь v к нулю, получим $[\theta^{12}, \theta^{13}] = 0$, что противоречит лемме. Итак, $l = 1$.

Положив в равенстве (2.1) $\gamma = 0$, $\tau = \theta$, получим

$$[X^{12}(u) + X^{13}(u), \theta^{23}] = 0. \tag{2.3}$$

Точно так же из (2.2) следует, что

$$[\theta^{(2)}, X^{13}(u) + X^{23}(u)] = 0. \tag{2.4}$$

Положим $\mathfrak{g}' = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x \otimes 1 + 1 \otimes x, \theta] = 0\}$, $\mathfrak{g}'$ — подалгебра Ли в $\mathfrak{g}$. Равенства (2.3) и (2.4) означают, что $X(u) \in \mathfrak{g}' \otimes \mathfrak{g}'$ при любом u. Поэтому $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$, т. е. $[x \otimes 1 + 1 \otimes x, \theta] = 0$ при любом $x \in \mathfrak{g}$. Отсюда следует, что θ пропорционально t. ■

Итак, мы доказали, что из условия Б), сформулированного в пункте 1.2, следует В). Ясно, что из В) следуют А) и Б). Поэтому для доказательства эквивалентности всех трех условий остается доказать, что не существует решения $X(u)$ уравнения (1.4), голоморфного в U, такого, что при некотором u тензор $X(u)$ невырожден. Это будет сделано в оставшейся части параграфа.

2.2. Предложение 2.2. *Пусть решение $X(u)$ уравнения* (1.4) *голоморфно в U и существует $u_0 \in U$ такое, что тензор $X(u_0)$ невырожден. Тогда тензор $X(0)$ тоже невырожден.*

Доказательство. Положив в соотношении (1.4) $v = 0$, получим

$$[X^{12}(u), X^{13}(u)] + [X^{12}(u) + X^{13}(u), X^{23}(0)] = 0.$$

Пусть $X(u) = K^\mu \otimes I_\mu$. Тогда

$$[K^\mu(u), K^\nu(u)] \otimes I_\mu \otimes I_\nu + K^\lambda(u) \otimes [I_\lambda \otimes 1 + 1 \otimes I_\lambda, X(0)] = 0,$$

откуда

$$[K^\mu(u), K^\nu(u)] = C_\lambda^{\mu\nu} K^\lambda(u), \tag{2.5}$$

где $C_\lambda^{\mu\nu}$ находятся из соотношения $C_\lambda^{\mu\nu} I_\mu \otimes I_\nu = [X(0), I_\lambda \otimes 1 \otimes I_\lambda]$. По условию, векторы $K^\mu(u_0)$ образуют базис в $\mathfrak{g}$. Поэтому для любого $u \in U$ существует ровно один линейный оператор φ_u: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ такой, что $\varphi_u(K^\mu(u_0)) = K^\mu(u)$. При этом φ_u голоморфно зависит от u. Надо доказать, что $\det \varphi_0 \neq 0$. Из соотношения (2.5) следует, что φ_u — эндоморфизм $\mathfrak{g}$ как алгебры Ли.

Лемма. *Пусть φ — эндоморфизм $\mathfrak{g}$ как алгебры Ли. Тогда* $\det \varphi \in \{0, 1, -1\}$.

Доказательство. Допустим, что $\varphi \neq 0$. Из простоты $\mathfrak{g}$ следует, что тогда φ — автоморфизм и, следовательно, сохраняет форму Киллинга. Поэтому $\det \varphi = \pm 1$. ■

Так как $\varphi_u = 1$ и φ_u голоморфно зависит от u, то из леммы следует что $\det \varphi_u = 1$ при любом u. В частности, $\det \varphi_0 = 1$.

Ясно, что если $X(u)$ — решение (1.4), голоморфное при $u = 0$, то тензор $r \overset{\text{def}}{=} X(0)$ удовлетворяет соотношению (1.2).

Предложение 2.3. *Пусть $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ — невырожденное решение уравнения* (1.2). *Тогда r удовлетворяет также* (1.3).

Доказательство. Пусть $r = K^\mu \otimes I_\mu = I_\mu \otimes L^\mu$. Невырожденность r означает, что $\{K^\mu\}$ и $\{L^\mu\}$ — базисы в $\mathfrak{g}$. Определим $C_\lambda^{\mu\nu}$ из соотношения $C_\lambda^{\mu\nu} I_\mu \otimes I_\nu = [r, I_\lambda \otimes 1 + 1 \otimes I_\lambda]$. Рассуждая так же, как при доказательстве предыдущего предложения, получим

$$[K^\mu, K^\nu] = C_\lambda^{\mu\nu} K^\lambda, \tag{2.6}$$

$$[L^\mu, L^\nu] = -C_\lambda^{\mu\nu} L^\lambda. \tag{2.7}$$

Из (2.6) следует, что $C_\lambda^{\mu\nu} + C_\lambda^{\nu\mu} = 0$, откуда $[r^{12} + r^{21}, I_\lambda \otimes 1 + 1 \otimes \otimes I_\lambda] = 0$. Поэтому $r^{12} + r^{21} = at$, $a \in \mathbf{C}$. Это означает, что

$$K^\mu + L^\mu = aI_\mu. \tag{2.8}$$

Пусть φ: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ — линейный оператор такой, что $\varphi(K^\lambda) = -L^\lambda$. Из равенств (2.6) и (2.7) следует, что φ — автоморфизм $\mathfrak{g}$ как алгебры Ли. Равенство (2.8) можно переписать в виде

$$(1 - \varphi)K^\mu = aI_\mu. \tag{2.9}$$

Нам надо доказать, что $a = 0$. Если $a \neq 0$, то из (2.9) следовало бы, что $\det(\varphi - 1) \neq 0$. На самом же деле для любого $\varphi \in \operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ существует ненулевое $x \in \mathfrak{g}$ такое, что $\varphi(x) = x$. Действительно, если φ имеет конечный порядок, то это следует из леммы 1 работы [3]. Если же φ имеет бесконечный порядок, то надо применить к циклической подгруппе, порожденной φ, следующую лемму.

Лемма. *Пусть $H \subset \operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ — бесконечная абелева подгруппа. Тогда существует ненулевое $x \in \mathfrak{g}$ такое, что $gx = x$ при любом $g \in H$.*

Доказательство. Обозначим через $\overline{H}$ наименьшую алгебраическую подгруппу в $\operatorname{Aut} \mathfrak{g}$, содержащую H, а через $\mathfrak{h}$ — алгебру Ли группы $\overline{H}$. Так как $|\overline{H}| = \infty$, то $\mathfrak{h} \neq 0$. Алгебра Ли группы $\operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ совпадает $\mathfrak{g}$, поэтому $\mathfrak{h}$ можно рассматривать как подалгебру в $\mathfrak{g}$. В качестве x можно взять любой ненулевой элемент $\mathfrak{h}$. ■

2.3. Остается доказать, что система уравнений (1.2), (1.3) не имеет невырожденных решений.

Предложение 2.4. *Пусть $r = r^{\mu\nu} I_\mu \otimes I_\nu$ — невырожденный кососимметричный тензор, (S_{kl}) — матрица, обратная к $(r^{\mu\nu})$, B — билинейная форма на $\mathfrak{g}$ с матрицей (S_{kl}). Для того, чтобы выполнялось соотношение* (1.2), *необходимо и достаточно, чтобы форма B была 2-коциклом, т. е. чтобы выполнялось тождество*

$$B([x, y], z) + B([y, z], x) + B([z, x], y) = 0, \quad x, y, z \in \mathfrak{g}. \tag{2.10}$$

Доказательство. Соотношение (1.2) эквивалентно равенству

$$C_{ij}^{\alpha} r^{i\beta} r^{j\gamma} + C_{ij}^{\beta} r^{\alpha i}\, r^{j\gamma} + C_{ij}^{\gamma} r^{\alpha i} r^{\beta j} = 0,$$

где C_{ij}^{α} — структурные константы $\mathfrak{g}$. Это равенство, в силу кососимметричности r, можно переписать в виде

$$C_{ij}^{\alpha} r^{i\beta} r^{j\gamma} + C_{ij}^{\beta} r^{i\alpha} r^{i\gamma} + C_{ij}^{\gamma} r^{i\alpha} r^{j\beta} = 0. \tag{2.11}$$

Умножив обе части (2.11) на $S_{\alpha k} S_{\beta l} S_{\gamma m}$, получим

$$C_{lm}^{\alpha} S_{\alpha k} + C_{mk}^{\beta} S_{\beta l} + C_{kl}^{\gamma} S_{\gamma m} = 0,$$

что эквивалентно (2.10).

Покажем теперь, что билинейная кососимметрическая форма B на $\mathfrak{g}$, являющаяся 2-коциклом, вырождена. Действительно, так как $\mathfrak{g}$ проста, то всякий коцикл является кограницей, т. е. $B(x, y) = l([x, y])$, где $l \in \in \mathfrak{g}^*$. Образ l при изоморфизме $\mathfrak{g}^* \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}$, определяемом формой Киллинга, обозначим через z. Легко видеть, что z принадлежит ядру B.

Эквивалентность условий А) — В) доказана.

§ 3. Теорема типа Вейерштрасса

Классическая теорема Вейерштрасса утверждает, что если функция $f(u)$, мероморфная на *всей* комплексной плоскости, удовлетворяет функциональному уравнению вида

$$P(f(u), f(v), f(u + v)) = 0, \tag{3.1}$$

где P — ненулевой многочлен, то функция f либо эллиптическая, либо рациональная, либо имеет вид $\varphi(e^{kz})$, где φ — рациональная функция. Предположим, теперь, что функция f определена лишь в некоторой окрестности нуля $U \subset \mathbf{C}$ и принимает векторные значения, а многочлен P в соотношении (3.1) тоже векторнозначен. Мы покажем, что тогда, при некоторых дополнительных предположениях, функция f имеет вид $f(u) = \bar{f}(ua)$, где $\bar{f}$ — квазиабелева функция на $\mathbf{C}^n$ (т. е. либо абелева функция, либо вырождение абелевых), $a \in \mathbf{C}^n$.

Перейдем к точным формулировкам. Напомним, что мероморфная функция φ на $\mathbf{C}^n$ называется абелевой, если она имеет $2n$ периодов, линейно независимых над $\mathbf{R}$.

Определение. Мероморфная функция φ на n-мерном комплексном векторном пространстве L называется *квазиабелевой*, если существуют система координат $z_1, \ldots, z_n$ в пространстве L, целые числа $p, q, r \geqslant 0$, $p+q+r=n$ и векторы $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2r} \in L$ такие, что

1) при фиксированных $z_{p+q+1}, \ldots, z_n$ $\varphi(z_1, \ldots, z_n)$ является рациональной функцией от $z_1, \ldots, z_p$, $e^{z_{p+1}}, \ldots, e^{z_{p+q}}$;

2) векторы γ_i являются периодами φ;

3) векторы $\bar{\gamma}_i \in \mathbf{C}^r$, образованные последними r координатами векторов γ_i, линейно независимы над $\mathbf{R}$.

Пусть $f(u)$ — мероморфная функция со значениями в $\mathbf{C}^m$, заданная в некотором круге $U \subset \mathbf{C}$ с центром в нуле. Обозначим через U' дополнение множества полюсов f. Предположим, что выполнены тождества

$$P_j(f(u), f(v), f(u+v)) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N,$$

где P_j — многочлены от $3n$ переменных. Обозначим через S множество точек $(u, v) \in U' \times U'$ таких, что система уравнений

$$P_j(f(u), f(v), x) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N$$

относительно неизвестного $x \in \mathbf{C}^m$ имеет не более одного решения (ясно, что если $u+v \in U'$, то хотя бы одно решение у этой системы существует). Обозначим через T множество точек $(u, w) \in U' \times U'$ таких, что система уравнений

$$P_j(x, f(v), f(w)) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N$$

имеет не более одного решения.

Теорема 2.1. *Если S и T имеют непустые внутренности, то существуют натуральное число n, вектор $a \in \mathbf{C}^n$ и квазиабелева функция $\bar{f}$ на $\mathbf{C}^n$ такие, что*

а) $f(u) = \bar{f}(ua)$,

б) *выполнены тождества* $P_j(\bar{f}(u), \bar{f}(v), \bar{f}(u+v)) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, N$.

Доказательство. Пусть $X \in \mathbf{C}^m$ — замыкание по Зарисскому множества точек вида $f(u)$, $u \in U'$. Пусть $\Gamma \subset X \times X \times X$ — замыкание по Зарисскому множества точек вида $(f(u), f(v), f(u+v))$, где $u, v, u+v \in U'$. Ясно, что многообразия X и Γ неприводимы.

Лемма. *Все три проекции $\Gamma \to X \times X$ являются бирациональными изоморфизмами.*

Доказательство. Рассмотрим, например, проекцию π_{12} множества Γ на произведение первых двух сомножителей. Пусть $W \subset X^2$ — непустое открытое по Зарисскому подмножество такое, что слои отображения π_{12} над точками W имеют одинаковую мощность k. Положим $A = \{(u, v) \in U' \times U' \mid (f(u), f(v)) \in W\}$. Ясно, что A всюду плотно в $U' \times U'$. Поэтому $A \cap S \neq \phi$, откуда $k \leqslant 1$. С другой стороны, A содержит хотя бы одну точку (u, v) такую, что $u+v \in U'$. Поэтому $k \geqslant 1$

Таким образом, π_{12} — бирациональный изоморфизм. Для остальных двух проекций доказательство аналогично. ■

Так как π_{12} — бирациональный изоморфизм, то Γ — график рационального отображения μ: $X \times X \to X$, которое можно рассматривать как «операцию» на X. Ясно, что эта «операция» коммутативна. Так как π_{13} и π_{23} — бирациональные изоморфизмы, то для нее существует обратная «операция». Покажем, что «операция» μ ассоциативна. Обозначим через V множество точек $(x_1, x_2, x_3) \in X^3$, для которых имеют смысл выражения $\mu(x_1, x_2)$, $\mu(\mu(x_1, x_2), x_3)$, $\mu(x_2, x_3)$, $\mu(x_1, \mu(x_2, x_3))$. Положим $R \overset{\text{def}}{=} \{(f(u_1), f(u_2), f(u_3)) \mid u_1, u_2, u_3, u_1 + u_2, u_2 + u_3, u_1 + u_2 + u_3 \in U'\}$. Легко видеть, что если $(x_1, x_2, x_3) \in V \cap R$, то $\mu(\mu(x_1, x_2), x_3) = \mu(x_1, \mu(x_2, x_3))$. Так как $V \cap R \subset X$ всюду плотно по Зарисскому, то отсюда следует ассоциативность μ.

Итак, X является «бирациональной группой» в смысле А. Вейля. Известно ([16], [17]), что такая группа бирационально изоморфна настоящей алгебраической группе, которая определена однозначно. Итак, мы доказали, что существуют связная коммутативная алгебраическая группа G, рациональная функция $\tilde{f}$: $G \to \mathbf{C}^m$ и мероморфное отображение φ: $U \to G$ такие, что

$$\begin{gathered} P_j(\tilde{f}(g_1), \tilde{f}(g_2), \tilde{f}(g_1 + g_2)) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N, \\ \varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v). \end{gathered} \tag{3.2}$$

Из (3.2) легко вывести, что φ голоморфно и, более того, продолжается до голоморфного гомоморфизма $\mathbf{C} \to G$.

По теореме Шевалле, любая связная коммутативная алгебраическая группа над $\mathbf{C}$ является расширением абелева многообразия при помощи прямого произведения конечного числа аддитивных и мультипликативных групп. Поэтому универсальная накрывающая группа для G изоморфна $\mathbf{C}^n$, а рациональные функции на G переходят в квазиабелевы функции на $\mathbf{C}^n$. Обозначим через $\bar{f}$ квазиабелеву функцию на $\mathbf{C}^n$, соответствующую $\tilde{f}$. Гомоморфизм φ: $\mathbf{C} \to G$ однозначно поднимается до голоморфного гомоморфизма $\bar{\varphi}$: $\mathbf{C} \to \mathbf{C}^n$. $\bar{\varphi}$ задается формулой вида $\bar{\varphi}(u) = ua$, $a \in \mathbf{C}^n$. Построенные таким образом $\bar{f}$ и a являются искомыми. ■

§ 4. Свойства невырожденных решений

4.1. Пусть $X(u)$ — невырожденное решение уравнения (1.4), определенное в некотором круге $U \subset \mathbf{C}$, содержащем 0. Мы будем всегда предполагать, что $\lim\limits_{u \to 0} uX(u) = t$ (согласно предложению 2.1, этого можно добиться, умножив $X(u)$ на подходящее число).

Предложение 4.1. *$X(u)$ удовлетворяет условию унитарности.*

Доказательство. Имеем:

$$[X^{12}(u_1 - u_2), \; X^{13}(u_1 - u_3)] + [X^{12}(u_1 - u_2), \; X^{23}(u_2 - u_3)] + [X^{13}(u_1 - u_3), X^{23}(u_2 - u_3)] = 0. \tag{4.1}$$

Поменяв местами u_1 и u_2, а также первый и второй сомножители в тензорном произведении $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, получим

$$[X^{21}(u_2 - u_1), X^{23}(u_2 - u_3)] + [X^{21}(u_2 - u_1), X^{13}(u_1 - u_3)] + [X^{23}(u_2 - u_3), X^{13}(u_1 - u_3)] = 0. \tag{4.2}$$

Сложив (4.1) и (4.2), приходим к тождеству

$$[X^{12}(u_1 - u_2) + X^{21}(u_2 - u_1), X^{13}(u_1 - u_3) + X^{23}(u_2 - u_3)] = 0.$$

Если теперь, зафиксировав u_1 и u_2, устремить u_3 к u_2, то получим $[X^{12}(u_1 - u_2) + X^{21}(u_2 - u_1),\ t^{23}] = 0$. Отсюда легко вывести, что $X^{12}(u_1 - u_2) + X^{21}(u_2 - u_1) = 0$.

Предложение 4.2. *Существуют натуральное число* n, *вектор* $a \to \mathbf{C}^n$ *и квазиабелева функция*: $\overline{X}$: $\mathbf{C}^n \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, *удовлетворяющая уравнению* (1.4), *такие, что* $X(u) = \overline{X}(ua)$.

Доказательство. Положим $U' = U \mid \{0\}$. Можно считать, что функция $X(u)$ голоморфна в U'. Согласно теореме 2.1, достаточно показать, что непустую внутренность имеют множества S и T, где S — множество точек $(u, v) \in U' \times U'$ таких, что уравнение

$$[X^{12}(u) - X^{23}(v),\ Z^{13}] = 0 \tag{4.3}$$

относительно неизвестного $Z \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ имеет только нулевое решение, T — множество точек $(u, w) \in U' \times U'$ таких, что уравнение $[Z^{12}, X^{23}(v) + X^{13}(w)] = 0$ имеет только нулевое решение. Так как $X(u)$ удовлетворяет условию унитарности, то $(u, w) \in T \Leftrightarrow (w, -v) \in S$. Так как S открыто, то достаточно доказать, что $S \neq \phi$. Покажем, что если $u \neq 0$ достаточно мало, то $(u, v) \in S$. При $v = u \neq 0$ уравнение (4.3) можно за писать в виде

$$[uX^{12}(u) - uX^{23}(u),\ Z^{13}] = 0. \tag{4.4}$$

При $u = 0$ уравнение (4.4) принимает вид

$$[t^{12} - t^{23},\ Z^{13}] = 0. \tag{4.5}$$

Покажем, что уравнение (4.5) имеет только нулевое решение. Отсюда будет следовать, что при всех достаточно малых u уравнение (4.4) имеет только нулевое решение.

Равенство (4.5) означает, что при любом μ

$$[I_\mu \otimes 1 - 1 \otimes I_\mu,\ Z] = 0. \tag{4.6}$$

Отсюда следует, что

$$[[I_\mu, I_\nu] \otimes 1 + 1 \otimes [I_\mu \otimes 1 - 1 \otimes I_\mu,\ I_\nu \otimes 1 - 1 \otimes I_\nu], Z] = 0. \tag{4.7}$$

Так как элементы вида $[I_\mu, I_\nu]$ порождают $\mathfrak{g}$ как векторное пространство, то из (4.7) следует, что $[I_\mu \otimes 1 + 1 \otimes I_\mu, T] = 0$ при любом μ. Отсюда и из (4.6) вытекает, что $[I_\mu \otimes 1,\ Z] = 0$ и, следовательно, $Z = 0$.

Из предложения 4.2, в частности, следует, что $X(u)$ продолжается до мероморфной функции на всем $\mathbf{C}$. Обозначим через Γ множество ее полюсов. Согласно предложению 2.1, все они простые.

Предложение 4.3. *Пусть* $\gamma \in \Gamma$. *Тогда существует* $A_\gamma \in \operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ *такое, что*

$$X(u + \gamma) = (A_\gamma \otimes 1)\, X(u). \tag{4.7a}$$

Доказательство. Положим $\tau = \lim\limits_{u \to \gamma} (u - \gamma)\, X(u)$. Пусть A_γ: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ — линейный оператор такой, что $\tau = A_\gamma(I_\mu) \otimes I_\mu$. Из равенства (2.2) и тождества $[t^{12}, r^{13} + r^{23}] = 0$, справедливого при любом $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, следует, что

$$[\tau^{12}, X^{13}(v + \gamma)] = -(A_\gamma \otimes 1 \otimes 1)([t^{12}, X^{23}(v)]) = \\ = (A\gamma \otimes 1 \otimes 1)([t^{12}, X^{13}(v)]). \tag{4.8}$$

Приравняв вычеты обеих частей (4.8) при $v = 0$, получим $[\tau^{12}, \tau^{13}] = (A_\gamma \otimes 1 \otimes 1)([t^{12}, t^{13}])$, т. е. $[A_\gamma(I_\mu),\ A_\gamma(I_\nu)] \otimes I_\mu \otimes I_\nu = A_\gamma([I_\mu, I_\nu]) \otimes I_\mu \otimes I_\gamma$. Это означает, что $A_\gamma([I_\mu, I_\nu]) = [A_\gamma(I_\mu),\ A_\gamma(I_\nu)]$, т. е. A_γ — эндоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Так как $A_\gamma \neq 0$, а алгебра $\mathfrak{g}$ простая, то A_γ — автоморфизм. Применив к обеим частям (4.8) отображение $A_\gamma^{-1} \otimes$

$\otimes 1 \otimes 1$ и воспользовавшись тем, что A_γ^{-1} — автоморфизм $\mathfrak{g}$ как алгебры Ли, получим равенство $[t^{12}, (A_\gamma^{-1} \otimes 1)X^{13}(v+\gamma) - X^{13}(v)] = 0$, откуда $(A_\gamma^{-1} \otimes 1) X(v+\gamma) = X(v)$. ■

Предложение 4.4. 1) Г — *дискретная подгруппа в* $\mathbf{C}$. 2) $A_{\gamma_1+\gamma_2} = A_{\gamma_1}A_{\gamma_2}$ *для любых* $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$; 3) $X(u+\gamma) = (1 \otimes A_\gamma^{-1}) X(u)$, $u \in \mathbf{C}$, $\gamma \in \Gamma$; 4) $(A_\gamma \otimes A_\gamma)X(u)$, $u \in \mathbf{C}$, $\gamma \in \Gamma$.

Доказательство. Пусть $\gamma, \gamma' \in \Gamma$. Правая часть равенства (4.7) имеет полюс при $u = \gamma'$. Поэтому левая часть обладает тем же свойством, т. е. $\gamma + \gamma' \in \Gamma$. Так как $X(u)$ удовлетворяет условию унитарности, то $\gamma \in \Gamma \Rightarrow -\gamma \in \Gamma$. Таким образом, Г — подгруппа в $\mathbf{C}$. Дискретность Г и утверждение 2) очевидны. Утверждение 3) эквивалентно равенству $X^{21}(u+\gamma) = (A_\gamma^{-1} \otimes 1)$, $X^{21}(u)$, вытекающему из (4.7) и условия унитарности. Утверждение 4) следует из 3) и равенства (4.7). ■

4.2. Предложение 4.5. *Пусть* Г *имеет ранг* 2. *Тогда*

а) *не существует ненулевого* $x \in \mathfrak{g}$ *такого, что* $A_\gamma(x) = x$ *при любом* $\gamma \in \Gamma$;

б) *существует подгруппа конечного индекса* $\Gamma' \in \Gamma$ *такая, что* $A_\gamma = 1$ *при* $\gamma \in \Gamma'$.

Доказательство. а) Допустим, что $x \in \mathfrak{g}$, $x \neq 0$, $A_\gamma(x) = x$ при $\gamma \in \Gamma$. Пусть $X(u) = X_{\mu\nu}(u)I_\mu \otimes I_\nu$. Определим мероморфную функцию $\varphi\colon \mathbf{C} \to \mathfrak{g}$ формулой $\varphi(u) = X_{\mu\nu}(I_\mu, x)\cdot I_\nu$ Легко видеть, что функция φ Г-периодична, имеет при $u = 0$ простой полюс и не имеет в параллелограмме периодов других полюсов. Полученное противоречие доказывает утверждение а).

б) Положим $H = \{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$. Лемма из доказательства предложения 2.3 и уже доказанное утверждение а) показывают, что $|H| < \infty$. Отсюда следует б). ■

Следствие. *Если ранг* Г *равен* 2, *то* $X(u)$ — *эллиптическая функция.*

4.3. В этом разделе будут доказаны утверждения теоремы 1.1, относящиеся к случаю, когда ранг Г равен 0 или 1. Пусть n и $\bar{X}$ обозначают то же, что в предложении 4.2.

Предложение 4.6. *Существуют* $(n-1)$*-мерное векторное подпространство* $V \subset \mathbf{C}^n$ *и голоморфный гомоморфизм* $\varphi\colon V \to \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ *такие, что при любых* $z \in \mathbf{C}^n$, $h \in V$

$$\bar{X}(z+h) = (\varphi(h) \otimes 1)\bar{X}(z), \tag{4.9}$$

$$(\varphi(h) \otimes \varphi(h))\bar{X}(z) = \bar{X}(z). \tag{4.10}$$

Доказательство. Пусть $\bar{X}(z) = Y(z)/f(z)$, где Y и f — целые функции. Без ограничения общности можно предполагать, что множество $S \overset{\text{def}}{=} \{z \in \mathbf{C} \mid f(z) = 0,\ Y(z) \neq 0\}$ непусто. Пусть $h \in S$.

Лемма. 1) *Существуют* $L(h) \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ *и* $c(h) \in \mathbf{C} \mid \{0\}$ *такие, что*

$$Y(h) = (c(h)L(h)I_\mu) \otimes I_\mu \tag{4.11}$$

2) $$\bar{X}(\lambda + h) = (L(h) \otimes 1)\bar{X}(z),\ z \in \mathbf{C}^n. \tag{4.12}$$

Доказательство. Пусть $\bar{X}(z) = K_\mu(z) \otimes I_\mu$. Те же рассуждения, что при выводе формулы (2.2), показывают, что $[Y^{12}(h), \bar{X}^{13}(z+h) + \bar{X}^{23}(z)] = 0$, и следовательно,

$$[Y(h), K_\mu(Z+h) \otimes 1 + 1 \otimes K_\mu(Z)] = 0. \tag{4.13}$$

Обозначим через W множество таких $Z \in \mathbf{C}^n$, что а) функция $\overline{X}$ голоморфна в точках z и $z + h$, б) тензоры $\overline{X}(Z)$ и $\overline{X}(z + h)$ невырождены. Пусть $z \in W$. Обозначим через $\mathfrak{a}$ подалгебру в $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, порожденную элементами $K_\mu(z + h) \otimes 1 + 1 \otimes K_\mu(z)$. Тогда $[Y(h), a] = 0$ для любого $a \in \mathfrak{a}$. Так как векторы $K_\mu(z)$ и $K_\mu(z + h)$ образуют базисы в $\mathfrak{g}$, то обе проекции $\mathfrak{a} \to \mathfrak{g}$ сюръективны. Отсюда и из простоты $\mathfrak{g}$ следует, что либо $\mathfrak{a} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, либо существует $L \in \operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ такой, что $\mathfrak{a} = \{L x \otimes 1 + 1 \otimes x \mid x \in \mathfrak{g}\}$. Первый случай невозможен, так как $[Y(h), \mathfrak{a}] = 0$, $Y(h) \neq 0$. Итак, мы доказали существование $L(z, h) \in \operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ такого, что

$$K_\mu(z + h) = L(z, h) K_\mu(z). \tag{4.14}$$

Из равенств (4.13) и (4.14) следует, что $[(L(z, h)^{-1} \otimes 1)\, Y(h), K_\mu(z) \otimes 1 + 1 \otimes K_\mu(Z)] = 0$, откуда

$$Y(h) = (c(z, h) L(z, h) I_\mu) \otimes I_\mu. \tag{4.15}$$

Из (4.15) вытекает, что $c(z, h)$ и $L(z, h)$ не зависят от z. Из (4.14) следует, что равенство (4.12) выполняется при $z \in W$, а значит, и при любом $z \in \mathbf{C}^n$.

Пусть $H \subset \mathbf{C}^n$ — подгруппа, порожденная S. Из леммы следует, что существует гомоморфизм $\varphi\colon H \to \operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ такой, что равенство (4.9) выполняется при любых $h \in H$, $z \in \mathbf{C}^n$. Множество полюсов функции $\overline{X}$ переходит в себя при сдвигах на элементы H. Поэтому $H \neq \mathbf{C}^n$. Так как H порождена аналитическим подмножеством $S \subset \mathbf{C}^n$ коразмерности 1, то S — открытое подмножество в объединении конечного или счетного числа параллельных друг другу аффинных гиперплоскостей, а H содержит $(n - 1)$-мерное векторное подпространство $V \subset \mathbf{C}^n$, параллельное этим гиперплоскостям. Из равенства (4.11) следует, что $L(h)$ голоморфно зависит от h. Поэтому отображение $\varphi\colon V \to \operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ голоморфно.

Те же рассуждения, что при доказательстве предложения 4.1, показывают, что $\overline{X}$ удовлетворяет условию унитарности. Отсюда и из (4.9) вытекает (4.10) (см. доказательство предложения 4.4). ■

Л е м м а 4.1. *Пусть a обозначает то же, что в предложении 4.2. Если $\tilde{a} - a \in V$, то функция $\tilde{X}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{X}(u\tilde{a})$ является решением уравнения* (1.4), *эквивалентным* $X(u)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формул (4.9) и (4.10) следует, что $\tilde{X}(u_1 - u_2) = (\varphi(u_1, h) \otimes \varphi(u_2, h)) X(u_1 - u_2)$, где $h = \tilde{a} - a$, φ обозначает то же, что в предложении 4.6.

П р е д л о ж е н и е 4.7. *Если* Γ *имеет ранг* 1, *то* $X(u)$ *эквивалентно решению* $\tilde{X}(u)$ *вида* $f(e^{ku})$, *где f — рациональная функция. Если* $\Gamma = 0$, *то* $X(u)$ *эквивалентно рациональному решению.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть p, q, r, $z_1, \ldots, z_n$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2r}$ обозначают то же, что в определении квазиабелевости (в нашей ситуации $\varphi(z) = \overline{X}(z)$). Обозначим через $e_1, \ldots, e_n$ базисные векторы в $\mathbf{C}^n$, соответствующие системе координат $z_1, \ldots, z_n$, а через W — подпространство в $\mathbf{C}^n$, заданное уравнениями $z_{p+q+1} = \ldots = z_n = 0$. Представим γ_i в виде $\delta_i a + h_i$, $\delta_i \in \mathbf{C}$, $h_i \in V$. Ясно, что $\delta_i \in \Gamma$.

Предположим, что ранг Γ равен 0 или 1. Тогда $W \not\subset V$. Действительно, если бы $W \subset V$, то векторы $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2r}$ порождали бы $\mathbf{C}^n/V$ как векторное пространство над $\mathbf{R}$, так что $\delta_1, \ldots, \delta_{2r}$ порождали бы $\mathbf{C}$ как векторное пространство над $\mathbf{R}$, а это невозможно, так как $\delta_1, \ldots, \delta_{2r} \in \Gamma$. Так как $W \not\subset V$, то существует $i \leqslant p + q$ такое, что $e_i \notin V$. Тогда a можно представить в виде $ke_i + h$, $k \in \mathbf{C}$, $h \in V$. Положим $\tilde{X}(u) = \overline{X}(uke_i)$. Согласно лемме 4.1, $\tilde{X}(u)$ — решение уравнения (1.4), эквивалентное $X(u)$.

Ясно, что если $i < p$, то $\tilde{X}(u)$ — рациональная функция, а если $i > p$, то $X(u)$ имеет вид $f(e^{ku})$, где f рациональна.

Множество полюсов $\tilde{X}(u)$ равно Г. Поэтому если ранг Г равен 1, то функция $\tilde{X}(u)$ не может быть рациональной, а если $\Gamma = \{0\}$, то $\tilde{X}(u)$ не может иметь вид $f(e^{ku})$, где f рациональна. ■

Теорема 1.1 полностью доказана. Решения вида $f(e^{ku})$, где f — рациональная функция, назовем *тригонометрическими*.

4.4. Уже отмечалось, что всякое невырожденное решение уравнения (1.4), мероморфное в окрестности нуля, продолжается до мероморфной функции на всем $\mathbf{C}$. Можно также показать, что всякое формальное решение уравнения (1.4) вида $X(u) = \frac{t}{u} + \sum_{i=0}^{\infty} X_i u^i$ сходится при достаточно малых $u \neq 0$.

§ 5. Эллиптические решения

5.1. Пусть $\Gamma \subset \mathbf{C}$ — дискретная подгруппа ранга 2, ω_1 и ω_2 — ее образующие. Пусть $X(u)$ — невырожденное решение уравнения (1.4) с множеством полюсов Г. Положим $A_1 = A_{\omega_1}$, $A_2 = A_{\omega_2}$ (по поводу обозначения A_γ см. предложение 4.3). Ясно, что $A_1A_2 = A_2A_1 = A_{\omega_1+\omega_2}$. Согласно предложению 4.5, автоморфизмы A_1 и A_2 имеют конечный порядок, причем не существует ненулевого $x \in \mathfrak{g}$ такого, что $A_1(x) = A_2(x) = x$. В этом пункте будет доказано, что если $A_1, A_2 \in \operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ коммутируют, имеют конечный порядок и не имеют общих неподвижных ненулевых векторов, то паре (A_1, A_2) соответствует ровно одно невырожденное решение уравнения (1.4) с множеством полюсов Г. Предварительно докажем лемму, справедливую для дискретной подгруппы $\Gamma \subset \mathbf{C}$ любого ранга.

Лемма 5.1. *Пусть* $A : \Gamma \to \operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ — *гомоморфизм*, $X(u)$ — *мероморфная функция на комплексной плоскости со значениями в* $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ *такая, что* а) $X(u + \gamma) = (A_\gamma \otimes 1)X(u)$ *при* $u \in \mathbf{C}$, $\gamma \in \Gamma$ (*здесь* $A_\gamma \overset{\text{def}}{=} A(\gamma)$); б) $X^{21}(u) = X^{12}(-u)$; в) $\lim\limits_{u\to 0} u X(u) = t$; г) $X(u)$ *не имеет полюсов при* $u \notin \Gamma$. *Положим*

$$Y(u_1, u_2, u_3) = [X^{12}(u_1 - u_2), \ X^{13}(u_1 - u_3)] + [X^{12}(u_1 - u_2), X^{23}(u_2, u_3)] + [X^{13}(u_1 - u_3), \ X^{23}(u_2 - u_3)]. \tag{5.1}$$

Тогда 1) *функция* $Y(u_1, u_2, u_3)$ *не имеет полюсов*; 2) *для любого* $\gamma \in \Gamma$

$$Y(u_1 + \gamma, u_2, u_3) = (A_\gamma \otimes 1 \otimes 1)Y(u_1, u_2, u_3), \tag{5.2}$$

$$Y(u_1, u_2, u_3 + \gamma) = (1 \otimes 1 \otimes A_\gamma^{-1})Y(u_1, u_2, u_3). \tag{5.3}$$

Доказательство. Формула (5.2) проверяется непосредственно. Равенство (5.3) следует из (5.2) и тождества

$$Y^{321}(u_3, u_2, u_1) = -Y^{123}(u_1, u_2, u_3), \tag{5.4}$$

вытекающего из условия унитарности. Если множество P полюсов функции Y не пусто, то оно является объединением некоторых из плоскостей вида $u_i - u_j = \gamma$, $\gamma \in \Gamma$. Надо доказать, что никакая такая плоскость не содержится в P. Ввиду формул (5.2)—(5.4) и равенства $Y^{213}(u_2, u_1, u_3) = -Y^{123}(u_1, u_2, u_3)$ достаточно показать, что плоскость $u_1 = u_2$ не содержится в P. Действительно, при фиксированных u_2, u_3 имеем

$$\lim_{u_1\to u_2} (u_1 - u_2)Y(u_1, u_2, u_3) = [t^{12}, X^{13}(u_2 - u_3) + X^{23}(u_2 - u_3)] = 0. \ ■$$

П р е д л о ж е н и е 5.1. *Пусть A_1, A_2 — коммутирующие автоморфизмы $\mathfrak{g}$ конечного порядка, не имеющие общих неподвижных ненулевых векторов. Тогда существует ровно одна мероморфная функция $X : \mathbf{C} \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ такая, что* 1) $\lim_{u\to 0} u\, X(u) = t$; 2) $X(u + \omega_i) = (A_i \otimes 1)\, X(u)$, $i = 1, 2$; 3) $X(u)$ *не имеет полюсов при* $u \notin \Gamma$. *Эта функция является решением уравнения* (1.4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $A_1^n = A_2^n = 1$. Имеем: $\mathfrak{g} = \bigoplus_{k,\, l \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}} \mathfrak{g}_{kl}$, где $\mathfrak{g}_{kl} = \{x \in \mathfrak{g} \mid A_1(x) = \zeta^k x,\ A_2(x) = \zeta^l x\}$, $\zeta = e^{2\pi i/n}$. По условию, $\mathfrak{g}_{00} = 0$. Так как $(A_1 \otimes A_1)t = (A_2 \otimes A_2)t = t$, то $t \in \bigoplus_{k,l} (\mathfrak{g}_{kl} \otimes \mathfrak{g}_{-k,-l})$. Проекцию t на $\mathfrak{g}_{kl} \otimes \mathfrak{g}_{-k,-l}$ обозначим t_{kl}.

Если искомая функция $X(u)$ существует, то $(A_1 \otimes A_1) X(u) = (A_2 \otimes A_2)\, X(u) = X(u)$ (см. предложение 4.4). Поэтому $X(u)$ надо искать в виде

$$X(u) = \sum_{\substack{k,\ l \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \\ (k,\ l) \neq (0,0)}} X_{k,l}(u),\quad X_{kl}(u) \in \mathfrak{g}_{kl} \otimes \mathfrak{g}_{-k,-l}.$$

Для того, чтобы функция $X(u)$ обладала свойствами 1)—3), необходимо и достаточно, чтобы функции $X_{kl}(u)$ удовлетворяли условиям 1′) $\lim_{u\to 0} u X_{kl}(u) = t_{kl}$; 2′) $X_{kl}(u + \omega_1) = \zeta^k X_{kl}(u)$, $X_{kl}(u_1 + \omega_2) = \zeta^l X_{kl}(u)$; 3′) $X_{kl}(u)$ не имеет полюсов при $u \notin \Gamma$. Так как $(k, l) \neq (0, 0)$, то существует ровно одна мероморфная функция φ_{kl} такая, что $\lim_{u\to 0} u\varphi_{kl}(u) = 1$, $\varphi_{kl}(u + \omega_1) = \zeta^k \varphi_{kl}(u)$, $\varphi_{kl}(u + \omega_2) = \zeta^l \varphi_{kl}(u)$, $\varphi_{kl}(u)$ не имеет полюсов при $u \in \Gamma$. Поэтому существует ровно одна функция X_{kl}, обладающая свойствами 1′)—3′), а именно, $X_{kl}(u) = \varphi_{kl}(u) \cdot t_{kl}$.

Функция $X(u) \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{k,\, l} \varphi_{kl}(u)\, t_{kl}$ удовлетворяет условиям леммы 5.1 (например, условие унитарности следует из равенств $\varphi_{kl}(u) = -\varphi_{-k,-l}(-u)$, $\sigma(t_{kl}) = t_{-k,-l}$, где $\sigma\colon \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ — перестановка сомножителей). Поэтому функция Y, определяемая формулой (5.1), является ограниченной целой функцией, и следовательно, константой (ограниченность следует из формул (5.2), (5.3) и очевидного тождества $Y(u_1 + u,\ u_2 + u,\ u_3 + u) = Y(u_1,\ u_2,\ u_3)$). Пусть $Y(u_1, u_2, u_3) = y$. Из равенства (5.2) вытекает, что $(A_1 \otimes 1 \otimes 1)y = (A_2 \otimes 1 \otimes 1)y = y$, откуда $y = 0$. ■

5.2. Итак, нахождение невырожденных эллиптических решений уравнения (1.4) сводится к описанию троек $(\mathfrak{g}, A_1, A_2)$, где $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли, A_1 и A_2 — коммутирующие автоморфизмы $\mathfrak{g}$ конечного порядка, не имеющие общих неподвижных ненулевых векторов. Пример такой тройки: $\mathfrak{g} = sl(n)$, A_1 и A_2 — внутренние автоморфизмы, соответствующие матрицам

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \zeta & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & & \zeta^{n-1} \end{pmatrix},\qquad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ \cdot & 0 & 1 & & \\ \cdot & & 0 & 1 & \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

где ζ — первообразный корень степени n из единицы. Соответствующие решения уравнения (1.4) были найдены в [1]. Следующее предложение показывает, что других невырожденных эллиптических решений уравнения (1.4) не существует.

П р е д л о ж е н и е 5.2. *Пусть A_1 и A_2 — коммутирующие автоморфизмы $\mathfrak{g}$ конечного порядка, причем не существует ненулевого* $x \in \mathfrak{g}$

такого, что $A_1(x) = A_2(x) = x$. *Тогда существует изоморфизм* $\mathfrak{g} \approx sl(n)$, *при котором* A_1 *и* A_2 *переходят во внутренние автоморфизмы, соответствующие матрицам* (5.5).

Доказательство. Положим $\mathfrak{g}_0 = \{x \in \mathfrak{g} \mid A_1(x) = x\}$.

Лемма 1. *Алгебра* $\mathfrak{g}_0$ *абелева.*

Доказательство. Известно, что если σ — автоморфизм конечного порядка полупростой алгебры Ли $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}^\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathfrak{a} \mid \sigma(x) = x\}$, то 1) $\mathfrak{a}^\sigma \neq 0$, 2) $\mathfrak{a}^\sigma$ — прямое произведение полупростой и абелевой алгебр (см. [3], лемма 1). Если бы алгебра $\mathfrak{g}_0$ была неабелевой, то, взяв в качестве $\mathfrak{a}$ полупростую часть $\mathfrak{g}_0$, а в качестве σ — ограничение A_2 на $\mathfrak{a}$, мы получили бы, что существует ненулевое $x \in \mathfrak{g}_0$ такое, что $A_2(x) = x$, а это невозможно. ■

В работе [3] каждой паре $(\mathfrak{a}, \sigma)$, где $\mathfrak{a}$ — простая алгебра Ли, $\sigma: \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$ — автоморфизм конечного порядка, сопоставлен граф, называемый схемой Дынкина пары $(\mathfrak{a}, \sigma)$. При этом, если алгебра $\mathfrak{a}^\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathfrak{a} \mid \sigma(x) = x\}$ абелева, то любой автоморфизм $\tau: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, коммутирующий с σ, индуцирует автоморфизм этого графа. Пусть Δ — схема Дынкина пары $(\mathfrak{g}, A_1)$, φ — автоморфизм Δ, индуцированный автоморфизмом $A_2: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, H — подгруппа в $\mathrm{Aut}\Delta$, порожденная φ.

Лемма 2. *Действие* H *на множестве вершин* Δ *транзитивно.*

Доказательство. Согласно [3], каждой вершине δ графа Δ каноническим образом соответствует элемент $h_\delta \in \mathfrak{g}_0$; при этом векторы h_δ порождают $\mathfrak{g}_0$ и число этих векторов равно $\dim \mathfrak{g}_0 + 1$. Допустим, что множество вершин Δ можно представить в виде объединения H-инвариантных подмножеств S_1 и S_2, где $S_1 \cap S_2 = \phi$, $S_1 \neq \phi$, $S_2 \neq \phi$. Положим $x = \sum_{\delta \in S_i} h_\delta$, $i = 1,2$. Так как S_i — инвариантно, то $A_2(x_i) = x_i$. Так как $x_i \in \mathfrak{g}_0$, то $A_1(x_i) = x_i$. Поэтому $x_i = 0$. Итак, $\sum_{\delta \in S_1} h_\delta = \sum_{\delta \in S_2} h_\delta = 0$, т. е. мы получили два независимых линейных соотношения между h_δ, а это невозможно.

Из леммы 2 следует, что группа $\mathrm{Aut}\,\Delta$ действует транзитивно на множестве вершин Δ. Поэтому Δ имеет тип $A_{n-1}^{(1)}$ (см. таблицы из [3]). Отсюда следует (см. [3], теорема 2), что $\mathfrak{g} \approx sl(n)$, а автоморфизм A_1 внутренний. Так как A_1 и A_2 играют одинаковую роль, то автоморфизм A_2 тоже внутренний.

Пусть $A_1: sl(n) \to sl(n)$, $A_2: sl(n) \to sl(n)$ — внутренние автоморфизмы, соответствующие матрицам P_1, $P_2 \in SL(n)$. Так как $A_1A_2 = A_2A_1$, то $P_1P_2P_1^{-1}P_2^{-1}$ — скалярная матрица. Таким образом, сопоставив элементу $(i, j) \in \mathbf{Z}^2$ оператор $p_1^ip_2^j$, мы получим проективное представление $\mathbf{Z}^2$ в пространстве $\mathbf{C}^n$. Это представление неприводимо: в противном случае существовала бы ненулевая матрица $B \in sl(n)$, коммутирующая с P_1 и P_2, и тогда выполнялись бы равенства $A_1(B) = A_2(B) = B$. Для доказательства предложения осталось воспользоваться хорошо известной теоремой о том, что любое n-мерное неприводимое проективное представление группы $\mathbf{Z}$ эквивалентно представлению, при котором элементу $(i, j) \in \mathbf{Z}^2$ соответствует оператор $T_1^iT_2^j$, где T_1 и T_2 определяются формулой (5.5.). ■

§ 6. Тригонометрические решения

При описании тригонометрических решений важную роль играют понятия кокстеровского автоморфизма и простых весов. Эти понятия вводятся в пунктах 6.1 и 6.2. В пункте 6.3 приводится формула для простейщего тригонометрического решения и объясняется его связь с цепочками Тоды — Богоявленского. В пункте 6.4 сформулирована основная теорема, описывающая все невырожденные тригонометрические решения. Оставшаяся часть параграфа посвящена доказательству этой теоремы.

6.1. Напомним, что $\mathfrak{g}$ обозначает простую конечномерную алгебру Ли над $\mathbf{C}$. Обозначим через $\operatorname{Aut}^0 \mathfrak{g}$ связную компоненту единицы группы $\operatorname{Aut} \mathfrak{g}$. Элементы $\operatorname{Aut}^0 \mathfrak{g}$ называются внутренними автоморфизмами. Известно, что $\operatorname{Aut} \mathfrak{g}/\operatorname{Aut}^0 \mathfrak{g}$, где Δ — схема Дынкина $\mathfrak{g}$. В частности, порядок группы $\operatorname{Aut} \mathfrak{g}/\operatorname{Aut}^0 \mathfrak{g}$ может равняться 1,2 или 6, причем последняя возможность реализуется только при $\mathfrak{g} = O(8)$ (в этом случае $\operatorname{Aut} \mathfrak{g}/\operatorname{Aut}^0 \mathfrak{g} \simeq S_3$). Пусть $\sigma \in \operatorname{Aut} \Delta$, K_σ — соответствующий смежный класс группы $\operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ по подгруппе $\operatorname{Aut}^0 \mathfrak{g}$.

• О п р е д е л е н и е. Автоморфизм $A \in K_\sigma$ называется *кокстеровским*, если выполняются следующие условия:

а) алгебра $\mathfrak{g}^A \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathfrak{g} \mid Ax = x\}$ абелева;

б) A имеет наименьший порядок среди автоморфизмов $A' \in K_\sigma$ таких, что алгебра $\mathfrak{g}^{A'}$ абелева.

Из результатов [3] следует, что для любой пары $(\mathfrak{g}, \sigma)$ кокстеровский автоморфизм C единствен с точностью до сопряжения внутренними автоморфизмами (в терминах [3] кокстеровский автоморфизм соответствует градуировке типа (1, 1, . . ., 1)). Порядок h автоморфизма C называется числом Кокстера пары $(\mathfrak{g}, \sigma)$. Приведем таблицу для чисел Кокстера, заимствованную из [11].

Тип $(\mathfrak{g},\sigma)$	$A_n^{(1)}$	$A_{2n}^{(2)}$	$A_{2n+1}^{(2)}$	$B_n^{(1)}$	$C_n^{(1)}$	$D_n^{(1)}$	$D_n^{(2)}$	$D_3^{(4)}$	$E_6^{(1)}$	$E_6^{(2)}$	$E_7^{(1)}$	$E_8^{(1)}$	$F_4^{(1)}$	$G_2^{(1)}$
h	$n+1$	$4n+2$	$4n+2$	$2n$	$2n$	$2n-2$	$2n$	12	12	18	18	30	12	6

В этой таблице подразумевается, что $(\mathfrak{g}, \sigma)$ имеет, скажем, тип $D_n^{(2)}$, если $\mathfrak{g}$ имеет тип D_n, а порядок σ равен 2 (отметим, что σ определяется своим порядком однозначно с точностью до сопряжения).

Приведем способ построения кокстеровского автоморфизма. Выберем в $\mathfrak{g}$ систему образующих Вейля $\{X_i, Y_i, H_i\}$, где i пробегает множество вершин Δ (см. [8], часть III, глава VI, § 4). Обозначим через C автоморфизм $\mathfrak{g}$ такой, что $C(H_i) = H\sigma(i)$, $C(X_i) = e^{2\pi i/h} X_{\sigma(i)}$, $C(Y_i) = e^{-2\pi i/h} Y_{\sigma(i)}$. Из результатов [3] следует, что автоморфизм C кокстеровский.

Наконец, укажем явный вид кокстеровских автоморфизмов классических алгебр. Обозначения: C — кокстеровский автоморфизм, m — порядок σ, S — матрица с единицами на побочной диагонали и нулями на остальных местах, $\omega = e^{2\pi i/h}$, где h — число Кокстера пары $(\mathfrak{g}, \sigma)$. Для алгебр $o(n)$ и $\operatorname{sp}(n)$ используются не вполне стандартные реализации, а именно: $o(h) \overset{\text{def}}{=} \{X \in \operatorname{Mat}(n, \mathbf{C}) \mid X^t = -SXS^{-1}\}$, $\operatorname{sp}(2n) = \{X \in \operatorname{Mat}(n, \mathbf{C}) \mid X^t = -BXB^{-1}\}$, где $B = (b_{ij})$, $b_{ij} = -b_{ji}$, $b_{ij} = 0$ при $i + j \neq 2n + 1$, $b_{ij} \neq 0$ при $i + j = 2n + 1$. Кокстеровские автоморфизмы классических алгебр Ли таковы:

1) если $\mathfrak{g} = sl(n)$, $m = 1$, то $h = n$, $C(X) = TXT^{-1}$, где $T = \operatorname{diag}(1, \omega, . . ., \omega^{n-1})$;

2) если $\mathfrak{g} = sl(2n+1)$, $m = 2$, то $h = 4n + 2$, $C(X) = -TX^tT^{-1}$, где $T = S \cdot \operatorname{diag}(1, \omega, . . ., \omega^{2n})$;

3) если $\mathfrak{g} = sl(2n)$, $m = 2$, то $h = 4n - 2$, $C(X) = -TX^tT^{-1}$, где $T = S \cdot \operatorname{diag}(1, \omega, . . ., \omega^{n-2}, \omega^{n-1}, \omega^n, . . ., \omega^{2n-2})$;

4) если $\mathfrak{g} = \mathrm{sp}\,(2n)$, то $h = 2n$, $C\,(X) = TXT^{-1}$, где $T = \mathrm{diag}\,(1, \omega, \ldots, \omega^{2n-1})$;

5) если $\mathfrak{g} = o\,(2n+1)$, то $h = 2n$, $C\,(x) = TXT^{-1}$, где $T = \mathrm{diag}\,(1, \omega, \ldots, \omega^{2n-1}, 1)$;

6) если $\mathfrak{g} = O\,(2n)$, $m = 1$, то $h = 2n - 2$, $C\,(X) = TXT^{-1}$, где $T = \mathrm{diag}\,(1, \omega, \ldots, \omega^{n-2}, \omega^{n-1}, \omega^{n}, \ldots, \omega^{2n-3}, 1)$;

7) если $\mathfrak{g} = o\,(2n)$, $m = 2$, то $h = 2n$, $C\,(X) = TXT^{-1}$, где

$$T = \begin{pmatrix} \omega & & & & & & & 0 \\ & \omega^2 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \omega^{n-1} & & & & \\ & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & 1 & 0 & & \\ & & & & & & \omega^{n+1} & \\ & & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & & & \omega^{2n-1} \end{pmatrix}.$$

6.2. Зафиксируем $\sigma \in \mathrm{Aut}\Delta$ и кокстеровский автоморфизм $C \in K_\sigma$. Положим $\mathfrak{h} = \{x \in \mathfrak{g} \mid Cx = x\}$, $\mathfrak{h}$ — абелева подалгебра в $\mathfrak{g}$. Положим $\omega = e^{2\pi i/h}$, где h — число Кокстера пары $(\mathfrak{g}, \sigma)$. Разложим $\mathfrak{g}$ по собственным значениям C: $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}/h\mathbf{Z}} \mathfrak{g}_j$, где $\mathfrak{g}_j \overset{\mathrm{def}}{=} \{x \in \mathfrak{g} \mid Cx = \omega^j x\}$ (в частности, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$). Для любого $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ обозначим через $\mathfrak{g}_j^k$ множество таких $x \in \mathfrak{g}$, что $[a, x] = \alpha\,(a)^x$ при любом $a \in \mathfrak{h}$. Согласно [3], $\mathfrak{g}_j = \bigoplus_{\alpha} \mathfrak{g}_j^\alpha$ и $\dim \mathfrak{g}_j^\alpha \leqslant 1$ при $\alpha \neq 0$. Положим $\Gamma = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \mathfrak{g}_1^\alpha \neq 0\}$ элементы Γ называются *простыми весами* (так как C — кокстеровский автоморфизм, то из результатов [3] следует, что это определение простых весов эквивалентно определению, приведенному в [3]). Согласно [3], $0 \notin \Gamma$, так что для любого $\alpha \in \Gamma$ $\dim \mathfrak{g}_1^\alpha = 1$. Взаимное расположение простых весов удобно описывать при помощи схемы Дынкина. Схема Дынкина пары $(\mathfrak{g}, C)$ — это граф, вершины которого взаимно однозначно соответствуют простым весам, а характер соединения вершин A и B, соответствующих простым весам α и β, определяется следующими правилами: а) число отрезков, соединяющих α и β, равно $\frac{4\,(\alpha, \beta)^2}{(\alpha, \alpha)\,(\beta, \beta)}$; б) если $\frac{(\alpha, \alpha)}{(\beta, \beta)} > 1$, то эти отрезки снабжены стрелкой, указывающей на B. (Отметим, что изоморфизм $\mathfrak{h} \to \mathfrak{h}^*$, определяемый скалярным произведением в $\mathfrak{h}$, позволяет перенести это скалярное произведение в $\mathfrak{h}^*$.) Схемы Дынкина всех пар $(\mathfrak{g}, C)$ приведены в [3].

6.3. Так как $(C \otimes C)t = t$, то $t \in \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}/h\mathbf{Z}} (\mathfrak{g}_j \otimes \mathfrak{g}_{-j})$. Проекцию t на $\mathfrak{g}_j \otimes \mathfrak{g}_{-j}$ обозначим t_j. Положим

$$\xi\,(\lambda) = \frac{t_0}{2} + \frac{1}{\lambda^h - 1} \sum_{j=0}^{h-1} t_j \lambda^j, \quad X\,(u) = \xi\,(e^{u/h}). \tag{6.1}$$

П р е д л о ж е н и е 6.1. *Функция $X\,(u)$, определенная формулой* (6.1), *является решением уравнения* (1.4) *с множеством полюсов $2\pi i\mathbf{Z}$ и вычетом t в нуле.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко проверить, что $X\,(u + 2\pi i) = (C \otimes 1)X\,(u)$, $X^{21}\,(u) = -X^{12}\,(-u)$, $\lim_{u \to 0} uX\,(u) = t$, множество полюсов $X\,(u)$ равно $2\pi i\mathbf{Z}$. Таким образом, из леммы 5.1 следует, что функция

$$Z\,(\lambda, \mu) \overset{\mathrm{def}}{=} [\xi^{12}\,(\lambda), \xi^{13}\,(\lambda\mu)] + [\xi^{12}\,(\lambda), \xi^{23}\,(\mu)] + [\xi^{13}(\lambda\mu), \xi^{33}\,(\mu)]$$

не имеет полюсов при $\lambda \neq 0, \infty$, $\mu \neq 0, \infty$. Так как $\xi(\lambda)$ не имеет полюсов при $\lambda = 0, \infty$, то $Z(\lambda, \mu)$ не имеет полюсов также при $\lambda = 0, \infty$ и при $\mu = 0, \infty$. Поэтому $Z(\lambda, \mu)$ — константа. С другой стороны, $\lim\limits_{\lambda, \mu \to \infty} Z(\lambda, \mu) = 0$, так как $t_0 \in \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$, а алгебра $\mathfrak{h}$ абелева. ■

Замечания. 1) Легко видеть, что группа инвариантности G решения (6.1) состоит из тех и только тех автоморфизмов $\mathfrak{g}$, которые коммутируют с C. Ясно, что G содержит подгруппу H, порожденную C и автоморфизмами $e^{ad\,a}$, $a \in \mathfrak{h}$. Можно показать, что $G(H)$ — это группа автоморфизмов схемы Дынкина $(\mathfrak{g}, C)$.

2) Предложение 6.1 останется в силе, если C заменить любым автоморфизмом конечного порядка A таким, что алгебра $\mathfrak{g}^A \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathfrak{g} \mid Ax = x\}$ абелева. Оказывается, однако, что решение, соответствующее любому такому A, эквивалентно решению, соответствующему C.

В [10] было изучено уравнение

$$\ddot{\varphi} = -(\operatorname{grad} U)(\varphi), \ \varphi(t) \in \mathfrak{h}, \quad U(\varphi) = \sum_{\alpha \in \Gamma} e^{2\alpha(\varphi)}. \tag{6.2}$$

В частности, для него была найдена (L, A)-пара вида

$$L(\lambda) = \dot{\varphi} + \lambda e^{ad\,\varphi} I + \lambda^{-1} e^{-ad\,\varphi} J, \quad A(\lambda) = \lambda^{-1} e^{-ad\,\varphi} J - \lambda e^{ad\,\varphi} I, \tag{6.3}$$

где $I \in \mathfrak{g}$, $J \in \mathfrak{g}_{-1}$. Следующее предложение показывает, что решение (6.1) уравнения (1.4) является классической r-матрицей ([5], с. 141), соответствующей оператору L вида (6.3).

Предложение 6.2. *$\{L(\lambda), L(\mu)\} = 2[L(\lambda) \otimes 1 + 1 \otimes L(\mu), \xi(\lambda/\mu)]$, где ξ определяется формулой* (6.1).

Поясним, что $L(\lambda)$ и $L(\mu)$ рассматриваются как $\mathfrak{g}$-значные функции от φ и $\dot{\varphi}$, а их скобка Пуассона — это функция от φ и $\dot{\varphi}$ со значениями в $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$.

Доказательство. Пусть $I = \sum_{\alpha \in \Gamma} I_\alpha$, $J = \sum_{\alpha \in \Gamma} J_\alpha$, где $I_\alpha \in \mathfrak{g}_1^\alpha$, $J_\alpha \in \mathfrak{g}_{-1}^{-\alpha}$ (из инвариантности скалярного произведения в $\mathfrak{g}$ следует, что $\mathfrak{g}_{-1} = \bigotimes_{\alpha \in \Gamma} \mathfrak{g}_{-1}^{-\alpha}$). Обозначим через α^* образ α при изоморфизме $\mathfrak{h}^* \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}$, определяемом скалярным произведением в $\mathfrak{h}$. Имеем

$$\begin{aligned}\{L(\lambda), L(\mu)\} &= \{\dot{\varphi}, \mu e^{ad\,\varphi} I + \mu^{-1} e^{ad\,\varphi} J\} + \{\lambda e^{ad\,\varphi} I + \lambda^{-1} e^{-ad\,\varphi} J, \dot{\varphi}\} = \\ &= \sum_{\alpha \in \Gamma} (\{\dot{\varphi}, \mu e^{\alpha(\varphi)} I_\alpha + \mu^{-1} e^{\alpha(\varphi)} I_\alpha\} + \{\lambda e^{\alpha(\varphi)} I_\alpha + \lambda^{-1} e^{\alpha(\varphi)} J_\alpha, \dot{\varphi}\}) = \\ &= \sum_{\alpha \in \Gamma} e^{\alpha(\varphi)} (\mu \alpha^* \otimes I_\alpha + \mu^{-}/\alpha^* \otimes J_\alpha - \lambda I_\alpha \otimes \alpha^* - \lambda^{-1} J_\alpha \otimes \alpha^*).\end{aligned}$$

С другой стороны, так как $[\dot{\varphi} \otimes 1 + 1 \otimes \dot{\varphi}, \xi(\lambda/\mu)] = 0$, то

$$\begin{aligned}&\left[L(\lambda) \otimes 1 + 1 \otimes L(\mu), \xi\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\right] = \\ &\qquad = \sum_{\alpha \in \Gamma} e^{\alpha(\varphi)} \left[\lambda I_\alpha \otimes 1 + 1 \otimes \mu I_\alpha + \lambda^{-1} J_\alpha \otimes + 1 \otimes \mu^{-1} J_\alpha, \xi\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\right].\end{aligned}$$

Остается проверить, что

$$\left[\lambda I_\alpha \otimes 1 + 1 \otimes \mu I_\alpha, \xi\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\right] = \frac{1}{2}(\mu \alpha^* \otimes I_\alpha - \lambda I_\alpha \otimes \alpha^*), \tag{6.4}$$

$$\left[\lambda^{-1} J_\alpha \otimes 1 + 1 \otimes \mu^{-1} J_\alpha, \xi\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\right] = \frac{1}{2}(\mu^{-1} \alpha^* \otimes J_\alpha - \lambda^{-1} J_\alpha \otimes \alpha^*), \tag{6.5}$$

Докажем (6.4). Из равенства $[I_\alpha \otimes 1 + 1 \otimes I_\alpha, t] = 0$ вытекает, что $[1 \otimes I_\alpha, \ t_j] + [I_\alpha \otimes 1, t_{j-1}] = 0, \ j \in \mathbf{Z}/h\mathbf{Z}$. Поэтому

$$\left[\lambda I_\alpha \otimes 1 \otimes \mu I_\alpha, \xi\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\right] = \left[\lambda I_\alpha \otimes 1 + 1 \otimes \mu I_\alpha, \frac{t_0}{2}\right] - [1 \otimes \mu I_\alpha, t_0] =$$
$$= \frac{\mu}{2}[t_0, 1 \otimes I_\alpha] - \frac{\lambda}{2}[t_0, I_\alpha \otimes 1] = \frac{\mu}{2}\alpha^* \otimes I_\alpha - \frac{\lambda}{2} I_\alpha \otimes \alpha^*.$$

Точно так же доказывается (6.5). ■

Те же рассуждения, что при доказательстве предложения 6.2, показывают, что решение (6.1) уравнения (1.4) является классической r-матрицей, соответствующей двумерному обобщению уравнения (6.2) (см. [6], [12]).

6.4. Пусть $X(u)$ — невырожденное тригонометрическое решение уравнения (1.4). Без ограничения общности можно считать, что множество полюсов $X(u)$ — это $2\pi i\mathbf{Z}$. Пусть A — автоморфизм $\mathfrak{g}$ такой, что $X(u + 2\pi i) = (A \otimes 1) X(u)$. Обозначим через σ автоморфизм схемы Дынкина Δ алгебры $\mathfrak{g}$, определяемый A. В этой ситуации будем говорить, что решение $X(u)$ соответствует σ. Заметим, что если $X(u)$ заменить эквивалентным решением, то A заменится на $T_1 A T_2^{-1}$, где T_1 и T_2 принадлежат одной и той же связной компоненте $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$, и поэтому класс сопряженности σ не изменится.

Перейдем к описанию общего вида тригонометрических решений, соответствующих фиксированному $\sigma \in \operatorname{Aut}\Delta$. Зафиксируем кокстеровский автоморфизм $C \in K_\sigma$. Пусть h, Γ, t_j, . . . обозначают то же, что в пунктах 6.1 — 6.3. Дискретным параметром, от которого зависит решение, служит тройка $(\Gamma_1, \Gamma_2, \tau)$, где $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \Gamma$, τ — взаимно однозначное отображение Γ_1 на Γ_2 такое, что а) для любых $\alpha, \beta \in \Gamma$ $(\tau(\alpha), \tau(\beta)) = (\alpha, \beta)$, б) для любого $\alpha \in \Gamma_1$ существует натуральное k такое, что $\tau^k(\alpha) \notin \Gamma_1$. Отметим, что выражение $\tau^k(\alpha)$ имеет смысл только если α, $\tau(\alpha), \ldots, \tau^{k-1}_{(\alpha)} \in \Gamma_1$. Поэтому условие б) фактически означает, что выражение $\tau^k(\alpha)$ не имеет смысла при достаточно больших k. Тройку $(\Gamma_1, \Gamma_2, \tau)$, удовлетворяющую условиям а) и б), будем называть допустимой.

Пусть $(\Gamma_1, \Gamma_2, \tau)$ — допустимая тройка. Непрерывным параметром, от которого зависит решение, служит тензор $r \in \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$, удовлетворяющий системе уравнений

$$r^{12} + r^{21} = t_0, \tag{6.6}$$

$$(\tau\alpha \otimes 1)(r) + (1 \otimes \alpha)(r) = 0, \ \alpha \in \Gamma_1. \tag{6.7}$$

Поясним, что если $r = \sum_{i=1}^{k} h_i \otimes h_i', h_i, h_i' \in \mathfrak{h}, \alpha \in \mathfrak{h}^*$, то

$$(\alpha \otimes 1)(r) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{k} \alpha(h_i) h_i', (1 \otimes \alpha)(r) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{k} \alpha(h_i') h_i.$$

Лемма 6.1. *Система уравнений* (6.6), (6.7) *совместна. Решениями соответствующей однородной системы являются кососимметрические тензоры из* $\mathfrak{h}_0 \otimes \mathfrak{h}_0$, *где* $\mathfrak{h}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in \mathfrak{h} \mid \forall \alpha \in \Gamma_1, \ \alpha(a) = (\tau\alpha)(a)\}$ *и только эти тензоры.*

Доказательство этой леммы, как и лемм 6.2—6.4 будет приведено в пункте 6.6.

Обозначим через $\mathfrak{a}_i$ $(i = 1, 2)$ подалгебру в $\mathfrak{g}$, порожденную подпространствами $\mathfrak{g}_1^\alpha$, $\alpha \in \Gamma_i$. Напомним, что $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j, \alpha} \mathfrak{g}_j^\alpha$.

Лемма 6.2. $\mathfrak{a}_i$ *является суммой некоторых из подпространств* $\mathfrak{a}_j^\alpha$.

Согласно лемме 6.2, существует единственный проектор $P\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{a}_1$ такой, что $P(\mathfrak{g}_j^\alpha) = 0$, если $\mathfrak{g}_j^\alpha \not\subset \mathfrak{a}_1$. Для любого $\alpha \in \Gamma_1$ зафиксируем изоморфизм векторных пространств $\mathfrak{g}_1^\alpha \simeq \mathfrak{g}_1^{\tau(\alpha)}$ (напомним, что $\dim \mathfrak{g}_1^\alpha = \dim \mathfrak{g}_1^{\tau(\alpha)} = 1$).

Лемма 6.3. *Изоморфизмы* $\mathfrak{g}_1^\alpha \simeq \mathfrak{g}_1^{\tau(\alpha)}$, $\alpha \in \Gamma_1$, *продолжаются до изоморфизма алгебр Ли* $\theta\colon \mathfrak{a}_1 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}_2$.

Определим линейный оператор $\tilde\theta\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ формулой $\tilde\theta(x) = \theta(P(x))$.

Лемма 6.4. *Оператор* $\tilde\theta$ *нильпотентен.*

Положим $\psi = \dfrac{\tilde\theta}{1-\tilde\theta} = \tilde\theta + \tilde\theta^2 + \ldots$

Теорема 6.1. 1) *Пусть* $r \in \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$ *удовлетворяет системе уравнений* (6.6), (6.7). *Тогда функция*

$$X(u) = r + \frac{1}{e^u - 1}\sum_{j=0}^{h-1} e^{ju/h}\, t_j - \sum_{j=1}^{h-1} e^{ju/h}(\psi \otimes 1)\, t_j + \sum_{j=1}^{h-1} e^{-ju/h}(1 \otimes \psi)\, t_{-j} \qquad (6.8)$$

является решением уравнения (1.4) *с множеством полюсов* $2\pi i\mathbf{Z}$ *и вычетом* t *в нуле. При этом* $X(u + 2\pi i) = (C \otimes 1)X(u)$.

2) *Всякое тригонометрическое решение уравнения* (1.4) *с множеством полюсов* $2\pi i\mathbf{Z}$ *и вычетом* t *в нуле, соответствующее автоморфизму* $\sigma \in \operatorname{Aut} \mathbf{Z}$, *эквивалентно решению вида* (6.8).

Доказательству этой теоремы посвящены пункты 6.5—6.7.

Замечание. 1) Решение (6.1) соответствует случаю, когда $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \phi$, $r = t_0/2$.

2) Легко видеть, что решение (6.8) $\mathfrak{h}_0$-инвариантно, где $\mathfrak{h}_0$ обозначает то же, что в лемме 6.1. Поэтому, прибавив к этому решению любой кососимметрический тензор из $\mathfrak{h}_0 \otimes \mathfrak{h}_0$, мы получим снова решение уравнения (1.4) (см. пункт 1.1). Согласно лемме 6.1, этим способом можно все решения, соответствующие фиксированной тройке $(\Gamma_1, \Gamma_2, \tau)$, получить, исходя из одного решения. Далее, нетрудно показать, что изменение изоморфизмов $\mathfrak{g}_1^\alpha \simeq \mathfrak{g}_1^{\tau(\alpha)}$, $\alpha \in \Gamma_1$ от их выбора зависят θ, ψ и, следовательно, $X(u)$ приводит к замене $X(u)$ на $(e^{\operatorname{ad} a} \otimes e^{\operatorname{ad} a})\, X(u)$, $a \in \mathfrak{h}$. Таким образом, из теоремы 6.1 следует, что, с точностью до описанных в пункте 1.1 способов размножения решений и таких тривиальных преобразований, как умножение решения на число и замена u на cu, число невырожденных тригонометрических решений уравнения (1.4) конечно.

3) Можно показать, что если решения $X(u)$ и $\tilde X(u)$ вида (6.8) эквивалентны, то $\tilde X(u) = (g \otimes g)X(u)$, $g \in G$, где G обозначает то же, что в замечании 1 после предложения 6.1.

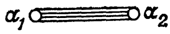
4) Из предыдущего замечания и замечания 1 после предложения 6.1 следует, что а) если решения $X(u)$ и $\tilde X(u)$ вида (6.8), соответствующие тройкам $(\Gamma_1, \Gamma_2, \tau)$ и $(\tilde\Gamma_1, \tilde\Gamma_2, \tilde\tau)$ эквивалентны, то $(\tilde\Gamma_1, \tilde\Gamma_2, \tilde\tau)$ получается применением к $(\Gamma_1, \Gamma_2, \tau)$ некоторого автоморфизма схемы Дынкина пары $(\mathfrak{g}, C)$; б) если $(\tilde\Gamma_1, \tilde\Gamma_2, \tilde\tau)$ получается применением к $(\Gamma_1, \Gamma_2, \tau)$ автоморфизма схемы Дынкина пары $(\mathfrak{g}, C)$, то любое решение вида (6.8), соответствующее $(\Gamma_1, \Gamma_2, \tau)$, эквивалентно некоторому решению, соответствующему $(\tilde\Gamma_1, \tilde\Gamma_2, \tilde\tau)$.

Примеры. 1) $\mathfrak{g} = sl(2)$. У схемы Дынкина $\mathfrak{g}$ есть только тождественный автоморфизм:

$$h = 2,\ \mathfrak{h} = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a\end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbf{C}\right\},\ \mathfrak{g}_1 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0\end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbf{C}\right\},\ \Gamma = \{\alpha_1, \alpha_2\}.$$

$$C(X)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} X \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

где $\alpha_1(e_{22}-e_{11})=2$, $\alpha_2=-\alpha_1$ (здесь и в дальнейшем e_{ij} обозначает матрицу, у которой на пересечении i-ой строки и j-го столбца стоит единица, а остальные элементы равны нулю). Имеем: $\mathfrak{g}_1^{\alpha_1}=\mathbb{C}e_{21}$, $\mathfrak{g}_1^{\alpha_2}=\mathbb{C}e_{12}$. Схема Дынкина $(\mathfrak{g}, C)$ имеет вид



Существуют две существенно различные допустимые тройки $(\Gamma_1, \Gamma_2, \tau)$: а) $\Gamma_1=\Gamma_2=\phi$, б) $\Gamma_1=\{\alpha_1\}$, $\Gamma_2=\{\alpha_2\}$, $\tau(\alpha_1)=\alpha_2$ (случай, когда $\Gamma_1=\{\alpha_2\}$, $\Gamma_2=\{\alpha_1\}$, можно не рассматривать ввиду замечания 4)). Имеем: $t_0={}^1/_2\,(e_{11}-e_{22})\otimes(e_{11}-e_{22})$, $t_1=e_{12}\otimes e_{21}+e_{21}\otimes e_{12}$. Система уравнений (6.6), (6.7) имеет и в случае а) и в случае б) единственное решение $r=t_0/2$. В случае б) имеем $\mathfrak{a}_1=\mathbb{C}e_{21}$, $\mathfrak{a}_2=\mathbb{C}e_{22}$; θ можно выбрать так, чтобы $\theta(e_{21})=e_{12}$, тогда $\widetilde{\theta}(e_{21})=e_{12}$, $\widetilde{\theta}(e_{12})=\widetilde{\theta}(e_{11}-e_{22})=0$, $\psi=\widetilde{\theta}$. Таким образом, получаем два решения:

$$\text{а)}\qquad X_1(u)=\frac{e^u+1}{4(e^u-1)}(e_{11}-e_{22})\otimes(e_{11}-e_{22})+\frac{e_{12}\otimes e_{21}+e_{21}\otimes e_{12}}{e^{u/2}-e^{-u/2}},\tag{6.9}$$

$$\text{б)}\qquad X_2(u)=X_1(u)+(e^{-u/2}-e^{u/2})(e_{12}\otimes e_{12}).\tag{6.10}$$

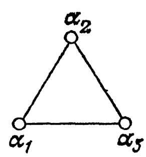
Оба решения хорошо известны. Более того, известны соответствующие решения квантового уравнения Янга — Бакстера: (6.9) соответствует тригонометрическому вырождению решения Бакстера (см. приложение к [5], формула П9), а (6.10) соответствует решению, найденному в [9] (с. 118, случай а)).

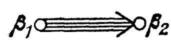
2) $\mathfrak{g}=sl(3)$. У схемы Дынкина $\mathfrak{g}$ два автоморфизма. Соответствующие кокстеровские автоморфизмы таковы:

$$C_1(X)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & e^{2\pi i/3} & 0\\ 0 & 0 & e^{2\pi i/3}\end{pmatrix} X \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & e^{2\pi i/3} & 0\\ 0 & 0 & e^{4\pi i/3}\end{pmatrix}^{-1},$$

$$C_2(X)=-\begin{pmatrix}0 & 0 & e^{2\pi i/3}\\ 0 & e^{\pi i/3} & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} X^t \begin{pmatrix}0 & 0 & e^{2\pi i/3}\\ 0 & e^{2\pi i/3} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Схемы Дынкина пар $(\mathfrak{g}, C_1)$ и $(\mathfrak{g}, C_2)$ имеют вид





Во втором случае есть единственная допустимая тройка: $\Gamma_1=\Gamma_2=\phi$ (дело в том, что $(\beta_1, \beta_1)\neq(\beta_2, \beta_2)$). Соответствующее решение является классической r-матрицей для уравнения Жибера — Шабата [2]. Оно эквивалентно решению, приведенному в приложении к [5] (формула П11). Выпишем решения, соответствующие C_1. В этом случае $h=3$, $\mathfrak{g}_j$ — множество матриц (a_{kl}) из $sl(3)$ таких, что $a_{kl}=0$ при $k-l\not\equiv j\pmod 3$. В частности, $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}_0$ — множество диагональных матриц. Имеем:

$$t=\sum_{k-l\equiv j(\mathrm{mod}\,3)} e_{kl}\otimes e_{lk}\quad\text{при}\quad j\neq 0,\qquad t_0=\frac{1}{3}\sum_{i<j}(e_{ii}-e_{jj})\otimes(e_{ii}-e_{jj}).$$

Простые веса $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ на матрице $\operatorname{diag}(a_1, a_2, a_3)$ принимают значения, равные $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $a_1 - a_3$. При этом $\mathfrak{g}_1^{\alpha_1} = \mathbf{C}e_{21}$, $\mathfrak{g}_1^{\alpha_2} = \mathbf{C}e_{32}$, $\mathfrak{g}_1^{\alpha_3} = \mathbf{C}e_{13}$. Допустимые тройки: а) $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \phi$; б) $\Gamma_1 = \{\alpha_1\}$, $\Gamma_2 = \alpha_2$, $\tau(\alpha_1) = \alpha_2$; в) $\Gamma_1 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\Gamma_2 = \{\alpha_2, \alpha_3\}$, $\tau(\alpha_1) = \alpha_2$, $\tau(\alpha_2) = \alpha_3$.

Рассмотрим случай в). В этом случае

$$\mathfrak{a}_1 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ c & b & 0 \end{pmatrix} \middle|\, a,\ b,\ c \in \mathbf{C}\right\}, \qquad \mathfrak{a}_2 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & c & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} \middle|\, a,\ b,\ c \in \mathbf{C}\right\},$$

$$\tilde{\theta}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{31} & a_{32} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad \psi\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{31} & a_{32} + a_{21} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

$$r = \frac{1}{3} \sum_{i,\, j=1}^{3} r_{ij} e_{ii} \otimes e_{jj}, \qquad (r_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.11}$$

Аналогичным образом рассматриваются случаи а) и б). Ответы:

а) $X_1(u) = \sum_{i,\, j=1}^{3} \rho_{ij} e_{ii} \otimes e_{jj} + Y(u)$, где

$$Y(u) = \frac{1}{e^u - 1}\left[\frac{1}{3}\sum_{i<j}(e_{ii} - e_{jj}) \otimes (e_{ii} - e_{jj}) + e^{u/3} \sum_{i-j \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)} e_{ij} \otimes e_{ji} + \right.$$
$$\left. + e^{2u/3} \sum_{i-j \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)} e_{ij} \otimes e_{ji}\right],$$

$$(\rho_{ij}) = \begin{pmatrix} 1/3 & a & b \\ b & 1/3 & a \\ a & b & 1/3 \end{pmatrix}, \qquad a + b = -\frac{1}{3}.$$

б) $X_2(u) = r + Y(u) - e^{u/3} e_{32} \otimes e_{12} + e_{12}^{-u/3} e_{12} \otimes e_{32}$, где r определяется формулой (6.11);

в) $X_3(u) = X_2(u) - e^{u/3} e_{13} \otimes (e_{12} + e_{23}) - e^{2u/3} e_{12} \otimes e_{13} +$
$+ e^{-u/3}(e_{12} + e_{23}) \otimes e_{13} + e^{-2u/3} e_{13} \otimes e_{12}$.

6.5. В качестве первого шага к доказательству теоремы 6.1 переведем задачу классификации тригонометрических решений на другой язык.

Пусть $X(u)$ — тригонометрическое решение уравнения (1.4) с множеством полюсов $2\pi i\mathbf{Z}$ и вычетом t в нуле (такие решения будем называть нормированными). Имеем:

$$X(u + 2\pi i) = (A \otimes 1) X(u) = (1 \otimes A^{-1}) X(u), \quad A \in \operatorname{Aut} \mathfrak{g}. \tag{6.12}$$

Так как существует k такое, что $X(u)$ — рациональная функция от e^{ku}, то A имеет конечный порядок m. Тогда $X(u) = \varphi(e^{u/m}) I_\mu \otimes I_\mu$, где $\{I_\mu\}$ — ортонормированный базис в $\mathfrak{g}$, φ — рациональная функция со значениями в пространстве линейных операторов $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Разложим $\varphi(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $Z = \infty$: $\varphi(z) = \sum_{i=-\infty}^{N} \varphi_i z^i$. Обозначим через $\mathfrak{g}[z, z^{-1}]$ алгебру многочленов вида $\sum_{i=l}^{n} x_i z^i$, $x_i \in \mathfrak{g}$. Определим оператор $\Phi\colon \mathfrak{g}[z, z^{-1}] \to \mathfrak{g}[z, z^{-1}]$ формулой $\Phi\left(\sum_i x z^i\right) = \sum_i \varphi_i(x_i) z^i$. Определим в $\mathfrak{g}[z, z^{-1}]$ инвариантное скалярное произведение формулой $\left(\sum_i x_i z^i, \sum_j y_j z^j\right) = \sum_i (x_i, y_{-i})$. Положим $\zeta = e^{2\pi i/m}$. Имеем: $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}} \mathfrak{g}_i$, где $\mathfrak{g}_i \overset{\mathrm{def}}{=} \{x \in$

$\in \mathfrak{g} \mid Ax = \zeta^i x\}$. Пусть Π_i: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ — проектор на $\mathfrak{g}_i$. Определим проектор Π: $\mathfrak{g}[z, z^{-1}] \to \mathfrak{g}[z, z^{-1}]$ формулой $\prod\left(\sum_i x_i z^i\right) = \sum_i \prod_i (x_i) z^i$.

Лемма 6.5. 1) *Оператор* Φ *обладает следующими свойствами*:

а) $\Phi(\mathfrak{g}z^i) \subset \mathfrak{g}z^i$,

б) $\Phi(\mathfrak{g}z^i) = 0$ *при* $i \geqslant 0$,

в) $\Phi = \Pi\Phi\Pi$,

г) $\Phi + \Phi^* = \Pi$,

д) $[\Phi(w_1), \Phi(w_2)] = \Phi([w_1, \Phi(w_2)] + [\Phi(w_1), w_2] - [\Pi w_1, w_2])$, $w_1, w_2 \in \mathfrak{g}[z, z^{-1}]$.

2) *Построенное отображение из множества нормированных тригонометрических решений уравнения* (1.4), *удовлетворяющих соотношению* (6.12), *в множество линейных операторов* Φ: $\mathfrak{g}[z, z^{-1}] \to \mathfrak{g}[z, z^{-1}]$, *обладающих свойствами* а) — д), *биективно*.

Доказательство. 1) Свойства а) и б) очевидны. Из (6.12) следует, что $\varphi(z, \zeta) = A\varphi(z) = \varphi(z)A$, поэтому $\varphi_i = \Pi_i\varphi_i = \varphi_i\Pi_i$, откуда следует в). Чтобы доказать г), воспользуемся равенством

$$\varphi_i = -\operatorname*{res}_{z=\infty} z^{-i-1}\varphi(z) = \operatorname*{res}_{z=0} z^{-i-1}\varphi(z) + \sum_{k=0}^{m-1} \operatorname*{res}_{z=\zeta^k} z^{-i-1}\varphi(z).$$

$=$Так как $\operatorname*{res}_{u=0} X(u) = t$, то $\operatorname*{res}_{u=2\pi k} X(u) = (A^k \otimes 1)\ t$, откуда $\operatorname*{res}_{z=\zeta^k} \varphi(z) = 1/mA^m \cdot \zeta^k$. Из условия унитарности следует, что $\varphi(z) = -\varphi(z^{-1})^*$. Таким образом,

$$\varphi_i = -\operatorname*{res}_{z=0} z^{-i-1}\varphi(z-1)^* + \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \zeta^{-i_k} A^k = \Pi_i - \varphi^*_{-i} \tag{6.13}$$

откуда следует г). Для доказательства д) воспользуемся уравнением (1.4). Имеем:

$$[X^{12}(u), X^{13}(u+v)] = [\varphi(z_1)I_\mu, \varphi(z_1, z_2)I_\nu] \otimes I_\mu \otimes I_\nu,$$

где $z_1 = e^{u/m}$, $z_2 = e^{v/m}$. Далее,

$$[X^{12}(u), X^{23}(v)] = (\varphi(z_1) \otimes 1 \otimes 1)[t^{12}, X^{23}(v)] =$$
$$= -(\varphi(z_1) \otimes 1 \otimes 1)[t^{12}, X^{13}(v)] =$$
$$= -\varphi(z_1)[I_\mu, \varphi(z_2)I_\mu] \otimes I_\mu \otimes I_\nu,$$

$$[X^{13}(u+v), X^{23}(v)] = (\varphi(z_1, z_2) \otimes 1 \otimes 1)[t^{13}, X^{23}(v)] =$$
$$= -(\varphi(z, z_2) \otimes 1 \otimes 1)[t^{13}, X^{21}(v)] =$$
$$= -(\varphi(z, z_2) \otimes 1 \otimes 1)[t^{13}, \varphi(z_2)^* I_\mu \otimes I_\mu \otimes 1] =$$
$$= \varphi(z, z_2)[\varphi(z_2)^* I_\mu, I_\nu] \otimes I_\mu \otimes I_\nu.$$

Поэтому из уравнения (1.4) следует, что

$$[\varphi(z_1)I_\mu, \varphi(z, z_2)I_\nu] = \varphi(z_1)[I_\mu, \varphi(z_2)I_\nu] - \varphi(z, z_2)[\varphi(z_2)^* I_\mu I_\nu].$$

Разложив обе части этого равенства в ряд Лорана в окрестности точки $z_1 = z_2 = \infty$, приравняв коэффициенты при $z_1^{i+j} z_2^j$, и воспользовавшись формулой (6.13), получим

$$\varphi_i I_\mu, \varphi_j I_\nu] = \varphi_{i+j}[I_\mu, \varphi_j I_\nu] - \varphi_{i+j}[\varphi^*_{-j} I_\mu, I_\nu] =$$
$$= \varphi_{i+j}([I_\mu, \varphi_j I_\nu] + [\varphi_j I_\mu, I_\nu] - [\Pi_j I_\mu, I_\nu]),$$

откуда следует д).

2) По оператору Φ однозначно восстанавливаются φ_i, $\varphi(z)$ и, наконец, $X(u)$. Обратив рассуждения, использованные при доказательстве

утверждения 1), получим, что если Φ обладает свойствами а)—д), то $X(u)$— нормированное тригонометрическое решение уравнения (1.4). ■

Положим $G_i = \mathfrak{g}_i z^i$, $G = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} G_i$. Ясно, что G — градуированная подалгебра Ли в $\mathfrak{g}[z, z^{-1}]$, а скалярное произведение в G невырождено. Пусть Φ обладает свойствами а) — д) (см. лемму 6.5). Из свойства в) следует, что $\Phi(G) \subset G$. Пусть $f\colon G \to G$ — ограничение Φ на G. Тогда

$$f(G_i) \subset G_i, \tag{6.14}$$

$$f(G_i) = 0 \text{ при } i \gg 0, \tag{6.15}$$

$$f + f^* = 1, \tag{6.16}$$

$$[f(w_1), f(w_2)] = f([w_1, f(w_2)] + [f(w_1), w_2] - [w_1, w_2]), \ w_1, w_2 \in G. \tag{6.17}$$

Наоборот, любой линейный оператор $f\colon G \to G$, обладающий свойствами (6.14) — (6.17), однозначно продолжается до оператора $\Phi\colon \mathfrak{g}[z, z^{-1}] \to \mathfrak{g}[z, z^{-1}]$, обладающего свойствами а) — д).

Лемма 6.6. *Пусть линейный оператор* $f: G \to G$ *удовлетворяет условию* (6.16). *Положим* $C_1 = \operatorname{Im}(f - 1)$, $C_2 = \operatorname{Im} f$. *Тогда*

а) $C_1^\perp = \operatorname{Ker} f \subset C_1$, $C_2^\perp = \operatorname{Ker}(f - 1) \subset C_2$;

б) *отображение* $\theta : C_1/C_1^\perp \to C_2/C_2^\perp$, *переводящее смежный класс* $(f - 1)w$ *в смежный класс* fw, *корректно определено и является ортогональным изоморфизмом*;

в) *для того, чтобы* f *удовлетворял условию* (6.17) *необходимо и достаточно, чтобы* C_1 *и* C_2 *были подалгебрами в* G, $C_1^\perp$ *и* $C_2^\perp$ *были идеалами в* C_1 *и* C_2, *а* θ *являлось изморфизмом алгебр Ли.*

Доказательство. Утверждения а) и б) проверяются непосредственно. Пусть f удовлетворяет (6.17). Тогда

$$[(f - 1)w_1, (f - 1)w_2] = (f - 1)([w_1, f(w_2)] + [f(w_1), w_2] - [w_1, w_2]). \tag{6.18}$$

Из (6.18) следует, что C_1 — подалгебра, а из (6.17) следует, что C_2 — подалгебра. Из инвариантности скалярного произведения в G вытекает, что $[C_1, C_1^\perp] \subset C_1^\perp$, $[C_2, C_2^\perp] \subset C_2^\perp$. Формулы (6.17) и (6.18) показывают, что θ — изоморфизм алгебр Ли.

Пусть C_1 и C_2 — подалгебры в G (тогда $C_1^\perp$ и $C_2^\perp$ — идеалы в C_1 и C_2), а θ — изоморфизм алгебр Ли. Тогда для любых w_1, $w_2 \in G$ существуют $u \in G$, $v \in \operatorname{Ker} f$ такие, что

$$[f(w_1), f(w_2)] = f(u), \tag{6.19}$$

$$[(f - 1)w_1, (f - 1)w_2] = (f - 1)u + v. \tag{6.20}$$

Вычитая из (6.19) равенство (6.20), получим

$$[f(w_1), w_2] + [w_1, f(w_2)] - [w_1, w_2] = u - v. \tag{6.21}$$

Применив к обеим частям (6.21) оператор f и воспользовавшись тем, что $v \in \operatorname{Ker} f$, получим (6.17).

Заметим, что переход от f к θ — это обобщение преобразования Кэли, связывающего кососимметричные и ортогональные операторы.

6.6. В этом пункте будут доказаны леммы 6.1—6.4 и утверждение 1) теоремы 6.1. Пусть $(\Gamma_1, \Gamma_2, \tau)$ — допустимая тройка.

Лемма 6.7. *Векторы* $\tau\alpha - \alpha$, $\alpha \in \Gamma_1$ *линейно независимы.*

Доказательство. Пусть $\sum_{\alpha \in \Gamma_1} \lambda_\alpha (\tau\alpha - \alpha) = 0$. Запишем это соотношение в виде $\sum_{\alpha \in \Gamma} \mu_\alpha \alpha = 0$. Тогда $\sum_{\alpha \in \Gamma} \mu_\alpha = 0$. С другой стороны, известно [3], что между простыми весами есть ровно одно линейное соотношение, причем соответствующие коэффициенты имеют одинаковый знак. Поэтому $\mu_\alpha = 0$ для любого $\alpha \in \Gamma$. Отсюда следует, что $\tau(S) = S$, где $S \overset{\text{def}}{=} \{\alpha \in \Gamma_1 \mid \lambda_\alpha \neq 0\}$. Из условия б) в определении допустимой тройки и равенства $\tau(S) = S$ вытекает, что $S = \phi$.

Лемма 6.8. *Пусть V — конечномерное векторное пространство, снабженное невырожденной симметрической билинейной формой. Пусть $e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_k \in V$, причем векторы $e_1, \ldots, e_k$ линейно независимы. Для того, чтобы существовал линейный оператор $R: V \to V$ такой, что $R + R^* = 1$ и $Re_i = f_i$ при $i = 1, 2, \ldots, k$, необходимо и достаточно, чтобы $(e_i, f_j) + (e_j, f_i) = (e_i, e_j)$ для любых $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$.*

Доказательство леммы 6.1. Для любого $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ обозначим через α^* образ α при каноническом изоморфизме $\mathfrak{h}^* \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}$. Положим $r = (R \otimes 1)\, t_0$, $R: \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$. Тогда уравнения (6.6) и (6.7) перепишутся в виде

$$R + R^* = 1, \tag{6.22}$$

$$R\alpha^* + R^* (\tau\alpha)^* = 0, \ \alpha \in \Gamma_1. \tag{6.23}$$

Ввиду (6.22), уравнение (6.23) можно переписать в виде

$$R\alpha^* + R^* (\tau\alpha)^* = 0, \ \alpha \in \Gamma_1. \tag{6.24}$$

Поэтому из лемм 6.7 и 6.8 следует, что для доказательства совместности системы уравнений (6.6), (6.7) достаточно для любых $\alpha, \beta \in \Gamma_1$ проверить равенство $(\tau\alpha - \alpha, \tau\beta) + (\tau\beta - \beta, \tau\alpha) = (\tau\alpha - \alpha, \tau\beta - \beta)$. Это равенство эквивалентно условию а) в определении допустимой тройки. Однородная система, соответствующая уравнениям (6.6) и (6.7), эквивалентна следующей системе:

$$r^{12} + r^{21} = 0, \quad (\tau\alpha \otimes 1)(r) = (\alpha \otimes 1)(r), \ \ \alpha \in \Gamma_1.$$

Ее решениями являются кососимметрические тензоры из $\mathfrak{h}_0 \otimes \mathfrak{h}_0$. ■

Выберем ненулевые векторы $e_\alpha^+ \in \mathfrak{g}_1^\alpha$, $\alpha \in \Gamma_1$. Для любого $\alpha \in \Gamma$ обозначим через e_α^- элемент $\mathfrak{g}_{-1}$ такой, что $(e_\alpha^-, e_\beta^+) = \delta_{\alpha\beta}$ при всех $\beta \in \Gamma$. Для любых $\alpha, \beta \in \Gamma$ положим $A_{\alpha\beta} = \beta(h_\alpha)$, где $h_\alpha \overset{\text{def}}{=} 2\alpha^*/(\alpha,\alpha)$. Известно [3], что $A_{\alpha\beta} \in \mathbf{Z}$, $A_{\alpha\beta} < 0$ при $\alpha \neq \beta$. Кроме того, известно (см. [3], пункт 4, а также лемму 9 из [4]), что

$$[e_\alpha^+, e_\beta^-] = \delta_{\alpha\beta} h_\alpha, \ [h_\alpha, e_\beta^+] = A_{\alpha\beta} e_\beta^+, \quad [h_\alpha, e_\beta^-] = -A_{\alpha\beta} e_\beta^-, \tag{6.25}$$

$(ad\, e_\alpha^+)^{1-A_{\alpha\beta}} e_\beta^+ = (ad\, e_\alpha^-)^{1-A_{\alpha\beta}} e_\beta^- = 0$ при $\alpha \neq \beta$. Пусть G и G_j обозначают то же, что в пункте 6.5, в ситуации, когда $A = C$, $m = h$. Положим $G^+ = \bigoplus_{j=1}^{\infty} G_j$, $G^- = \bigoplus_{j=1}^{\infty} G_{-j}$. Известно [3], что алгебра G^+ порождается элементами $e_\alpha^+ z$, $\alpha \in \Gamma$, G^- — элементами $e_\alpha^- z^{-1}$, а $G_0 = \mathfrak{h}$ — элементами h_α. Для любого $S \subset \Gamma$ обозначим через G_S (соответственно, G_S^+) подалгебру в G, порожденную элементами $e_\alpha^+ z$, h_α, $e_\alpha^- z^{-1}$, $\alpha \in S$ (соответственно, элементами $e_\alpha^+ z$, $\alpha \in S$).

Лемма 6.9. *Пусть $S \subset \Gamma$, $S \neq \Gamma$. Тогда*

а) *G_S — полупростая конечномерная алгебра Ли с образующими Вейля $e_\alpha^+ z$, $e_\alpha^- z^{-1}$, k_α;*

б) G_S^+ *является суммой некоторых из подпространств* $\mathfrak{g}_j^\gamma z^j$, $\gamma \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\}$;

в) $G_S^+ \subset \bigoplus_{j=1}^{n-1} G_j$.

Доказательство. Из результатов [3] нетрудно вывести, что матрица $(A_{\alpha\beta})$, α, $\beta \in S$ является матрицей Картана полупростой конечномерной алгебры Ли. Отсюда и из (6.25) вытекает а). Так как $\dim \mathfrak{g}_1^\gamma = 1$ при $\gamma \neq 0$, то для доказательства б) достаточно показать, что если $\gamma \in \mathfrak{h}^*$, $G_S^+ \cap \mathfrak{g}_j^\gamma z^j \neq 0$, то $\gamma \neq 0$. Действительно, из а) следует, что в этом случае $\gamma(h_\alpha) \neq 0$ для некоторого $\alpha \in S$. Если бы $G_S^+ \not\subset \bigoplus_{j=1}^{h-1} G_j$, , то $G_S^+ \cap G_h \neq 0$, что противоречит б), так как $[\mathfrak{h}, G_h] = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}z^h] = 0$. ■

Из леммы 6.9 немеделенно следует лемма 6.2 ($\mathfrak{a}_i$ — это образ $G_{\Gamma_i}^+$ при каноническом гомоморфизме $G \to \mathfrak{g}$).

Пусть заданы допустимая тройка $(\Gamma_1, \Gamma_2, \tau)$ и изоморфизм φ_α: $\mathfrak{g}_1^\alpha \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}_1^{\tau(\alpha)}$. Будем предполагать, что элементы e_α^+, $\alpha \in \Gamma$ выбраны так, что $\varphi_\alpha(e_\alpha^+) = e_{\tau(\alpha)}^+$ при $\alpha \in \Gamma_1$ (такой выбор возможен ввиду условия б) из определения допустимой тройки). Из леммы 6.9 следует, что существует изоморфизм T: $G_{\Gamma_1} \xrightarrow{\sim} G_{\Gamma_2}$ такой, что $T(e_\alpha^+ z) = e_{\tau(\alpha)}^+ z$, $T(e_\alpha^- z^{-1}) = e_{\tau(\alpha)}^- z^{-1}$, $T(h_\alpha) = h_{\tau(\alpha)}$.

Отсюда вытекает лемма 6.3.

Определим линейный оператор $\widetilde{T}$: $G^+ \to G^+$ следующим образом: если $w \in G_{\Gamma_1}^+$, то $\widetilde{T}(w) = T(w)$; если же $\gamma \in \mathfrak{h}^*$, $j \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{g}_j^\gamma z^j \subset G_{\Gamma_1}^+$, $\widetilde{T}(\mathfrak{g}_j^* z^j) = 0$.

Лемма 6.10. *Оператор* $\widetilde{T}$ *нильпотентен.*

Доказательство. Допустим, что $w \in \mathfrak{g}_j^\gamma$, $z^j \subset G_{\Gamma_1}^+$, $w \neq 0$, причем для любого $k > 0$ $T^k(w) \in G_{\Gamma_1}^+$. Пусть $T(w) \in \mathfrak{g}_j^{\gamma'} z^j$. Ясно, что $\gamma = \sum_{\alpha \in S} n_\alpha, \alpha$, где $n_\alpha > 0$, $S \subset \Gamma_1$, $\gamma' = \sum_{\alpha \in S} n_\alpha \cdot \tau(\alpha) = \sum_{\alpha \in S'} n'_\alpha \cdot \alpha$, где $n'_\alpha > 0$, $S' \subset \Gamma_1$. При этом $\sum_{\alpha \in S} n_\alpha = \sum_{\alpha \in S'} n'_\alpha = j$. Так же как при доказательстве леммы 6.7, отсюда выводится, что $S' = \tau(S)$. Итак, $\tau^k(S) \subset \Gamma_1$ при любом k, что противоречит допустимости $(\Gamma_1, \Gamma_2, \tau)$. ■

Из леммы 6.10 следует лемма 6.4.

Приступим к доказательству утверждения 1) теоремы 6.1. Пусть $r \in \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$ удовлетворяет (6.6), и (6.7), тогда $r = (R \otimes 1)\, t_0$, где R: $\mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ удовлетворяет (6.22) и (6.24). Определим f_+: $G^+ \to G^+$ формулой $f_+ = \widetilde{T}/(\widetilde{T} - 1)$. Определим f_-: $G^- \to G^-$ формулой $f_- = 1 - f_+^*$. Пусть f: $G \to G$ — линейный оператор, ограничения которого на G^+, G^-, $\mathfrak{h}$ равны f_+, f_-, R. Ясно, что f удовлетворяет условиям (6.14) — (6.16). Остается показать, что f удовлетворяет также условию (6.17) (легко видеть, что построенное по f решение уравнения (1.4) задается формулой (6.8)).

Рассмотрим тройку (C_1, C_2, θ), соответствующую f (см. лемму 6.6).

Лемма 6.11. 1) *Если* $\alpha \in \Gamma_i$, *то* $h_\alpha \in C_i$.

2) *Пусть* $\alpha \in \Gamma_1$, $\overline{h}_\alpha$ *и* $\overline{\overline{h}}_{\tau(\alpha)}$ — *образы* h_α *и* $h_{\tau(\alpha)}$ *в* $C_1 \mid C_1^\perp$ *и* $C_2 \mid C_2^\perp$. *Тогда* $\theta(\overline{h}_\alpha) = \overline{\overline{h}}_{\tau(\alpha)}$.

Доказательство. Из (6.24) и равенства $(\tau(\alpha), \tau(\alpha)) = (\alpha, \alpha)$ следует, что $R(h_{\tau(\alpha)} - h_\alpha) = h_{\tau(\alpha)}$ при $\alpha \in \Gamma_1$. Отсюда легко вывести лемму. ■

Легко видеть, что $C_1 = G_{\Gamma_1} + G^+ + V_1$, $C_2 = G_{\Gamma_2} + G^- + V_2$, где V_1, V_2 — векторные подпространства в $\mathfrak{h}$. Отсюда следует, что C_1 и C_2 — подалгебры Ли в G, причем $C_i \mid C_i^\perp = G_{\Gamma_i} \otimes \mathfrak{p}_i$, где $\mathfrak{p}_i$ — абелева алгебра, состоящая из элементов степени 0. Покажем, что θ — изоморфизм алгебр Ли. Так как оператор θ ортогонален, то достаточно показать, что $\theta(w) = T(w)$ при $w \in G_{\Gamma_1}$. Операторы θ и T ортогональны и сохраняют градуировку (ортогональность T следует из условия а) в определении допустимой тройки). Поэтому равенство $\theta(w) = T(w)$ достаточно доказать в случае, когда $w \in G_{\Gamma_1}$ — однородный элемент неотрицательной степени. При $w \in G^+_{\Gamma_1}$ это равенство проверяется непосредственно, а при $\deg w = 0$ оно следует из леммы 6.11.

6.7. В этом пункте используется система обозначений пункта 6.5 (в частности, автоморфизм A не предполагается кокстеровским). Пусть $f\colon G \to G$ удовлетворяет условиям (6.14) — (6.17). Имеем: $G = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} G^\lambda$, где $G^\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_n \operatorname{Ker}(f-\lambda)^n$.

Лемма 6.12. *Если $\lambda + \mu \neq 1$, то $[G^\lambda, G^\mu] \subset G^\nu$, где $\nu = \lambda\mu/(\lambda + \mu - 1)$. Если $\lambda + \mu = 1$, $\lambda\mu \neq 0$, то $[G^\lambda, G^\mu] = 0$.*

Доказательство. Если $\lambda + \mu \neq 1$, то положим $V = G^\nu$, $\nu = \lambda\mu/(\lambda + \mu - 1)$. Если $\lambda + \mu = 1$, $\lambda\mu \neq 0$, то положим $V = 0$. Надо показать, что если $(f-\lambda)^k x = 0$, $(f-\mu)^l y = 0$, то $[x, y] \in V$. Это утверждение доказывается индукцией по $k + l$ при помощи тождества

$$[(f-\lambda)x, (f-\mu)y] = (f-\lambda)[x, (f-\mu)y] + (f-\mu)[(f-\lambda)x, y] + ((\lambda+\mu-1)f - \lambda\mu)[x, y],$$

вытекающего из (6.17).

Лемма 6.13. *Если ψ—автоморфизм неразрешимой конечномерной алгебры Ли, то* $\det(\psi - 1) = 0$.

Доказательство сводится к случаю полупростой алгебры, а затем к рассмотренному при доказательстве предложения 2.3 случаю простой алгебры. ■

Положим $G' = \bigoplus_{\lambda \neq 0,1} G^\lambda$.

Лемма 6.14. *G' — конечномерная разрешимая подалгебра в G.*

Доказательство. Из леммы 6.15 следует, что G'-подалгебра. Из (6.15) и (6.16) следует, что $G_i \subset G^0$ при $i \gg 0$, $G_i \subset G^1$ при $i \ll 0$, Поэтому $\dim G' < \infty$. Определим $\psi\colon G' \to G'$ формулой $\psi = f/(f-1)$ Тогда $\det\psi \neq 0$, $\det(\psi - 1) \neq 0$. Из (6.17) и (6.18) следует, что ψ — автоморфизм G' как алгебры Ли. Остается воспользоваться леммой 6.13.

Лемма 6.15. 1) $(G^0)^\perp = G^0 \oplus G'$, $(G^1)^\perp = G^1 \oplus G'$. 2) *$G^0 \oplus G'$ — подалгебра в G, а G^0 — идеал в $G^0 \oplus G^1$.* 3) *$G^1 \oplus G'$ — подалгебра в G, а G^1 — идеал в $G^1 \oplus G^1$.*

Доказательство. Утверждение 1) следует из (6.16). Утверждения 2) и 3) вытекают из леммы 6.12. ■

Положим $\mathfrak{a} \stackrel{\text{def}}{=} \det G_0 = \mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{a}^\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{a} \cap G^\lambda$, $\mathfrak{a}' \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{a} \cap G'$, $n^\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathfrak{a} \mid [x, \mathfrak{a}_\lambda] \subset \mathfrak{a}_\lambda\}$. Согласно лемме 1 из [3], алгебра $\mathfrak{a}$ редуктивна в $\mathfrak{g}$.

Лемма 6.16. *$f(n^\lambda) \subset n^\lambda$.*

Доказательство. Индукцией по k докажем, что если $x \in n^\lambda$, $y \in \mathfrak{a}$, $(f-\lambda)^k y = 0$, то $[f(x), y] \in \mathfrak{a}^\lambda$. Из (6.17) следует, что $[f(x), f(y)] - f([f(x), y]) \in \mathfrak{a}^\lambda$, а по предположению индукции $[f(x), (f-\lambda)y] \in \mathfrak{a}^\lambda$. Поэтому $(f-\lambda)[f(x), y] \in \mathfrak{a}^\lambda$, и следовательно, $[f(x), y] \in \mathfrak{a}^\lambda$.

Предложение 6.3. *Существуют противоположные борелевские подалгебры $b_+, b_- \subset \mathfrak{a}$ такие, что* а) $f(b_+) \subset b_+$, $f(b_-) \subset b_-$; б) $\mathfrak{a}' \subset b_+ \cap b_-$, $b_+ \supset \mathfrak{a}^0 \supset [b_+, b_+]$, $b_- \supset \mathfrak{a}^1 \supset [b_-, b_-]$.

Доказательство. $\mathfrak{a}^0 \subset (\mathfrak{a}^0)^\perp$, поэтому из критерия Картана следует разрешимость $\mathfrak{a}^0$. Так как $\mathfrak{a}^0$ — идеал в $\mathfrak{a}^0 \oplus \mathfrak{a}'$, то из леммы 6.14 вытекает разрешимость $\mathfrak{a}^0 \oplus \mathfrak{a}'$. Поэтому $\mathfrak{a}^0 \oplus \mathfrak{a}'$ содержится в некоторой борелевской подалгебре b_+. Точно так же доказывается, что $\mathfrak{a}^1 \oplus \mathfrak{a}'$ содержится в некоторой борелевской подалгебре b_-. Так как $\mathfrak{a}^0 \oplus \mathfrak{a}' \oplus \mathfrak{a}' = \mathfrak{a}$, то $b_+ + b_- = \mathfrak{a}$, т. е. b_+ и b_- противоположны. Так как $(\mathfrak{a}^0)^\perp = \mathfrak{a}^0 \oplus \mathfrak{a}' \subset b_+$, то $\mathfrak{a}^0 \supset b_+^\perp = [b_+, b_+]$ (здесь «$\perp$» обозначает ортогональное дополнение в $\mathfrak{a}$). Аналогично, $\mathfrak{a}^1 \supset [b_-, b_-]$. Так как $b_+ \supset \mathfrak{a}^0 \supset [b_+, b_+]$, то $n^0 = b_+$. Поэтому из леммы 6.16 следует, что $f(b_+) \subset b_+$. Аналогично, $f(b_-) \subset b_-$. ■

Положим $\mathfrak{h} = b_+ \cap b_-$. $\mathfrak{h}$ — картановская подалгебра в $\mathfrak{a}$, причем $f(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$. Ясно, что $\mathfrak{h} = \mathfrak{a}' \oplus \mathfrak{h}^0 \oplus \mathfrak{h}^1$, где $\mathfrak{h}^0 = \mathfrak{a}^0 \cap \mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}^1 = \mathfrak{a}^1 \cap \mathfrak{h}$. При этом $\mathfrak{a}' \perp (\mathfrak{h}^0 \oplus \mathfrak{h}')$, а $\mathfrak{h}^0$ и $\mathfrak{h}^1$ изотропны.

Лемма 6.17. $[\mathfrak{h}, G^0] \subset G^0$, $[\mathfrak{h}, G^1] \in G^1$, $[\mathfrak{h}, G^1] \subset G'$.

Доказательство. Так как $[G^0 + G', G^0] \subset G^0$, то $[\mathfrak{h}^0 \oplus \mathfrak{a}', G^0] \subset G^0$. Выведем отсюда, что $[\mathfrak{h}, G^0] \subset G^0$. Известно (см. [3]), что $G = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} G_\alpha$, где $G_\alpha = \{w \in G \mid \forall a \in \mathfrak{h}\ [a, w] = \alpha(a) w\}$, поэтому достаточно показать, что если $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$, $\alpha \neq \beta$, $G_\alpha \neq 0$, $G_s \neq 0$, то ограничение $\alpha - \beta$ на $\mathfrak{h}^0 \otimes \mathfrak{a}'$ не равно нулю. Действительно, если бы $(\alpha - \beta)(\mathfrak{h}^0 \oplus \mathfrak{a}') = 0$, то $(\alpha - \beta, \alpha - \beta) = 0$, а это невозможно в силу пункта 5 работы [3].

Точно так же доказывается, что $[\mathfrak{h}, G^1] \subset G^1$. Так как $G' = (G^0 + G^1)^\perp$, то $[\mathfrak{h}, G'] \subset G'$. ■

Для любых $i \in \mathbf{Z}$, $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ положим $G_i^\alpha = \{w \in G_i \mid \forall a \in \mathfrak{h}, [a, w] = \alpha(a) w\}$. Элементы множества $\Sigma \overset{\text{def}}{=} \{(\alpha, i) \mid G^* \neq 0\}$ называются весами. Имеем: $G = \bigoplus_{(\alpha,i)\in\Sigma} G_i^\alpha$. Положим $\Sigma' = \{(\alpha, i) \in \Sigma \mid a \neq 0\}$. Каждому весу $(\alpha, i) \in \Sigma'$ сопоставим функционал λ_i^α: $\mathfrak{h} \to \mathbf{C}$ по формуле $\lambda_i(a) = \alpha(a) + i$. В [3] показано, что функционалы λ_i^α, $(\alpha, i) \in \Sigma'$, образуют аффинную систему корней в смысле [7].

Лемма 6.18. 1) *Существует камера Вейля K такая, что $G^0 = \mathfrak{h}^0 \oplus G^+$, $G^1 = \mathfrak{h}^1 \oplus G^-$, $G' = \mathfrak{a}'$, где $G^+ \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{(\alpha,i)\in\Sigma_+} G_i^\alpha$, $G^- \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{(\alpha,i)\in\Sigma_-} G_i^\alpha$, Σ_+ (соответственно Σ_-) — множество весов, положительных (отрицательных) относительно K.*

2) $$f(G^+) \subset G^+, \quad f(G^-) \subset G^-.$$

Доказательство. Пусть $(\alpha, i) \in \Sigma'$. Тогда $\dim G_i^\alpha = 1$ (см. [3]). Поэтому из леммы 6.17 следует, что либо $G_i^\alpha \subset G^0$, либо $G_i^\alpha \subset G^1$, либо $G_i^\alpha \subset G'$. Из (6.16) следует, что скалярное произведение на G' невырождено. Поэтому если бы $G_i^\alpha \subset G'$, то $G_{-i}^{-\alpha} \subset G'$ и, следовательно, G' содержало бы подалгебру, изоморфную $sl(2)$ (см. лемму 2 из [3]), а это противоречит лемме 6.14. Таким образом, $G_i^\alpha \subset G^0$ или $G_i^\alpha \subset G^1$. Из изотропности G^0 и G' следует, что $G_i^\alpha \subset G^0 \Leftrightarrow G_{-i}^{-\alpha} \subset G^1$. Положим $S = \{(\alpha, i) \in \Sigma' \mid G_i^\alpha \subset G^0\}$. Мы показали, что $S \cup (-S) = \Sigma'$. Кроме того, из (6.15) следует, что если $(\alpha, i) \in \Sigma'$, $i \gg 0$, то $(\alpha, i) \in S$. Отсюда вытекает существование камеры Вейля K такой, что все простые относительно K веса принадлежат S. Тогда $G_i^\alpha \subset G^0$ при $(\alpha, i) \in \Sigma_+$, $G_i^\alpha \subset G^1$ при $(\alpha, i) \in \Sigma_-$, откуда следует утверждение 1). Для доказательства 2) достаточно заметить, что $G^+ = (G^1 + \mathfrak{h})^\perp$, $G^- = (G^0 + \mathfrak{h})^\perp$. ■

Обозначим через Γ множество простых весов, соответствующих K. Для любого $S \subset \Gamma$ обозначим через G_S подалгебру в G, порожденную подпространствами G_i^α и $G_{-i}^{-\alpha}$, $(\alpha, i) \in S$. Положим $G_S^+ = G_S \cap G^+$. Рассмотрим тройку (C_1, C_2, θ), соответствующую f (см. лемму 6.6).

Лемма 6.19. *Существуют подмножества* $\Gamma_i \subset \Gamma$ *и векторные подпространства* $V_i \subset \mathfrak{h}$ $(i = 1, 2)$ *такие, что* $C_1 = G_{\Gamma_1} + G^+ + V_1$, $C_2 = G_{\Gamma_2} + G^- + V_2$.

Доказательство. Так как $C_1 = I_m \ (f - 1) \supset \mathfrak{h}^0 \oplus \mathfrak{a}'$, то $[\mathfrak{h}^0 \otimes \mathfrak{a}', C_1] = C_1$. Отсюда следует, что $[\mathfrak{h}, C_1] \subset C_1$ (см. доказательство леммы 6.17). Далее, $C_1 \supset G^0 \supset G^+$. Отсюда и из результатов [3] следует, что C_1 имеет требуемый вид. Аналогично доказывается утверждение о C_2. ■

Из леммы 6.19 следует, что $C_i/C_i^{\perp} = G_{\Gamma_i} \otimes \mathfrak{p}_i$, где $\mathfrak{p}_i$—абелева алгебра. Изоморфизм θ отображает G_{Γ_1} на G_{Γ_2}, сохраняя градуировку, поэтому θ индуцирует биекцию τ: $\Gamma_1 \to \Gamma_2$.

Лемма 6.20. *Тройка* $(\Gamma_1, \Gamma_2, \tau)$ *допустима.*

Доказательство. Определим ψ: $G^+ \to G^+$ формулой $\psi = f/(f - 1)$. Так как $G^+ \subset G^0$, то определение ψ корректно и ψ нильпотентен. Легко проверить, что если $(\alpha, i) \in \Gamma_1$, $\tau(\alpha, i) = (\beta, j)$, то $\psi(G_i^{\alpha}) = G_j^{\beta}$; если же $(\alpha, i) \in \Gamma \setminus \Gamma_1$, то $\psi(G_{\alpha}^{i}) = 0$. Отсюда следует условие б) из определения допустимой тройки. Условие а) вытекает из ортогональности θ. ■

Для любого $(\alpha, i) \in \Sigma$ обозначим через $n(\alpha, i)$ сумму коэффициентов разложения (α, i) по элементам Γ. Введем в G новую градуировку (назовем ее K-градуировкой), положив $\deg G_i^{\alpha} = n(\alpha, i)$.

Лемма 6.21. *f сохраняет K-градуировку.*

Доказательство. Достаточно проверить, что оператор ψ из доказательства леммы 6.20 сохраняет K-градуировку, а этот факт следует из аналогичного свойства θ. ■

Пусть $\Gamma = \{(\alpha_0, i_0), \ldots, (\alpha_r, i_r)\}$. Согласно [3], функционалы $\alpha_0, \ldots, a_r$ порождают $\mathfrak{h}^*$ и между ними есть ровно одно линейное соотношение $\sum\limits_{s=0}^{r} k_s\alpha_s = 0$. При этом коэффициенты k_s можно нормировать условием $\sum\limits_{s=0}^{r} k_s i_s = m$ и тогда $k_s \in \mathbf{N}$, а $\sum\limits_{s=0}^{r} k_s$ равна числу Кокстера h пары $(\mathfrak{g}, \sigma)$, где σ — автоморфизм схемы Дынкина $\mathfrak{g}$, соответствующий A. Поэтому существует ровно один элемент $a_0 \in \mathfrak{h}$ такой, что $\alpha_s(a_0) = \frac{1}{h} - \frac{i_s}{m}$, $s = 0, 1, \ldots, r$. Положим $C = A \cdot \exp(2\pi i \cdot ad a_0)$. Легко видеть, что C — кокстеровский автоморфизм. Положим $\omega = e^{2\pi i/h}$, $\mathfrak{g}_i^C = \{x \in \mathfrak{g} \mid Cx = \omega^j x\}$, $G^C = \bigoplus\limits_{j \in \mathbf{Z}} \mathfrak{g}_j^C z^j$. Определим линейный оператор φ: $G \to G^C$ следующим образом: если $x \in \mathfrak{g}$, $xz^j \in G_j^{\alpha}$, то $\varphi(xz^j) \overset{\text{def}}{=} xz^{n(\alpha, j)}$. Легко видеть, что это определение корректно и φ — изоморфизм алгебр Ли, сохраняющий скалярное произведение и переводящий K-градуировку G в обычную градуировку G^C. Поэтому оператор f: $G^C \to C^C$, заданный формулой $\tilde{f} = \varphi f \varphi^{-1}$, удовлетворяет условиям (6.14) — (6.17). Обозначим через $X(u)$ и $\tilde{X}(u)$ решения уравнения (1.4), соответствующие f и $\tilde{f}$ (см. пункт 6.5).

Лемма 6.22. *Решения $X(u)$ и $\tilde{X}(u)$ эквивалентны.*

Доказательство. Легко проверить, что $\tilde{X}(u) = (e^{u \cdot ad a_0} \otimes 1) X(u)$, $[a_0 \otimes 1 + 1 \otimes a_0, X(u)] = 0$. ■

Перейдем непосредственно к доказательству утверждения 2) теоремы 6.1. Пусть $X(u)$ — нормированное тригонометрическое решение уравнения (1.4), удовлетворяющее (6.12), f: $G \to G$ — соответствующий оператор. Лемма 6.22 показывает, что, заменив $X(u)$ эквивалентным решением, можно добиться, чтобы $i_0 = \ldots = i_r = 1$ и, тем самым, $A = C$. Легко видеть, что в этом случае оператор ψ из доказательства леммы 6.20 совпадает с оператором $\tilde{T}$, о котором идет речь в лемме 6.10. Поэтому ограничение f на G^+ равно $\tilde{T}$ $(\tilde{T}-1)$. Обращая доказательство леммы 6.11, получим, что ограничение f на $\mathfrak{h}$ удовлетворяет (6.22) и (6.24). Таким образом, наш оператор f совпадает с оператором f из пункта 6.6 и, следовательно, $X(u)$ имеет вид (6.8).

§ 7. Рациональные решения, не имеющие полюса на бесконечности

7.1. Пусть $X(u)$ — рациональное решение уравнения (1.4), не имеющее полюса на бесконечности и с вычетом t в нуле. Тогда

$$X(u)=\frac{t}{u}+r, \quad r\to\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}. \tag{7.1}$$

Легко проверить, что функция $X(u)$, заданная формулой (7.1), является решением (1.4) тогда и только тогда, когда r удовлетворяет системе уравнений (1.2), (1.3). Задача полной классификации решений этой системы представляется нам безнадежной, так как она содержит подзадачу классификации коммутативных подалгебр в $\mathfrak{g}$ (действительно, если $\mathfrak{a}$ — коммутативная подалгебра в $\mathfrak{g}$ и $r\in\mathfrak{a}\otimes\mathfrak{a}$, то r удовлетворяет (1.2)). Поэтому ограничимся тем, что приведем несколько способов построения решений системы уравнений (1.2), (1.3).

7.2. 1) Пусть $a, b\in\mathfrak{g}$, $[a, b]=b$. Тогда $r=a\otimes b-b\otimes a$ является решением системы (1.2), (1.3). Легко проверить, что при $\mathfrak{g}=sl(2)$ эта конструкция дает все ненулевые решения. Отметим, что если $a, b\in sl(2)$, $[a, b]=b$, то существует матрица $T\in SL(2)$, такая, что

$$a=T\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}T^{-1}, \qquad b=T\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}T^{-1}.$$

2) Пусть A — конечномерная коммутативная ассоциативная алгебра над $\mathbf{C}$, $\mathfrak{a}\overset{\text{def}}{=}A\otimes A^*$. Введем на $\mathfrak{a}$ структуру алгебры Ли следующим образом; $[e_i, e_j]=0$, $[e^i, e^j]=0$, $[e_i, e^j]=\alpha_{ik}^j e^k$, где $\{e_i\}$ — базис в A, $\{e^i\}$ — двойственный базис в A^*, $e_ie_j=\alpha_{ij}^{*}e_k$. Легко проверить, что тензор $r=e_i\otimes e^i-e^i\otimes e_i\in\mathfrak{a}\otimes\mathfrak{a}$ является решением системы (1.2), (1.3). Если, кроме того, задан гомоморфизм $f\colon\mathfrak{a}\to\mathfrak{g}$, то $(f\otimes f)(r)$ — решение, принадлежащее $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$. При $A=C$ этот способ построения решений превращается в способ 1).

7.3. Пусть $r\in\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ — решение системы (1.2), (1.3). Обозначим через $\mathfrak{a}$ наименьшее векторное подпространство в $\mathfrak{g}$ такое, что $r\in\mathfrak{a}\otimes\mathfrak{a}$. Тогда $\mathfrak{a}$ — подалгебра Ли и тензор r невырожден как элемент $\mathfrak{a}\otimes\mathfrak{a}$. Пусть B — билинейная форма на $\mathfrak{a}$, обратная по отношению к r (т. е. если $\{e_\mu\}$ — базис в $\mathfrak{a}$, $r=r^{\mu\nu}e_\mu\otimes e_\nu$, $(S_{\mu\nu})$ — матрица, обратная к $(r^{\mu\nu})$, то $B(e_\mu, e_\nu)=S_{\mu\nu}$). Согласно предложению 2.4, форма B является 2-коциклом (т. е. кососимметрична и удовлетворяет (2.10)). Наоборот, каждой паре $(\mathfrak{a}, B)$, где $\mathfrak{a}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$, B — невырожденный 2-коцикл на $\mathfrak{a}$, соответствует решение системы (1.2), (1.3).

Напомним, что 2-коциклами являются, в частности, 2-кограницы, т. е. формы вида $B(x, y)=l([x, y])$, где $l\in\mathfrak{a}^*$. Назовем функционал $l\in\mathfrak{a}^*$ невырожденным, если форма $l([x, y])$ невырождена. Алгебры Ли $\mathfrak{a}$, на которых существуют невырожденные линейные функционалы, исследовались, например, в [13], [14], [15]. Такие алгебры называются фробениусовыми. Итак, по фробениусовой алгебре Ли $\mathfrak{a}$, невырожденному функционалу $l\in\mathfrak{a}^*$ и вложению $\mathfrak{a}\hookrightarrow\mathfrak{g}$ строится решение системы

(1.2), (1.3). Это решение, по существу, не зависит от l, так как, согласно [15], все невырожденные функционалы на $\mathfrak{a}$ получаются применением внутренних автоморфизмов $\mathfrak{a}$ к фиксированному функционалу.

Пример. $\mathfrak{a}$ — множество матриц размера $n \times n$, у которых нижние k строк равны нулю. Как сообщил нам А. Г. Элашвили, алгебра $\mathfrak{a}$ фробениусова тогда и только тогда, когда n делится на k. Пусть это условие выполнено. Тогда функционал l: $\mathfrak{a} \to \mathbf{C}$, заданный формулой $l(A) = \sum_{i=1}^{n-k} a_{i,\, i+k}$, где $A = (a_{ij})$, невырожден. Соответствующий тензор $r \in \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$, удовлетворяющий (1.2) и (1.3), имеет вид

$$r = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \sum_{(a,\, b,\, c,\, d) \in S} (e_{i+ka,\, j+kb} \otimes e_{j+kc,\, i+kd} - e_{j+kc,\, i+kd} \otimes e_{i+ka,\, j+kb}),$$

где $S = \{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbf{Z},\ b + d - a - c = 1,\ 0 \leqslant b \leqslant a < m - 1,\ b \leqslant c < m - 1,\ 0 \leqslant d < m\}$, $m = n/k$, e_{rs} — матрица, у которой элемент на пересечении r-ой строки и s-го столбца равен 1, а остальные элементы равны нулю. Чтобы получить решение системы уравнений (1.2), (1.3), лежащее в $sl(n) \otimes sl(n)$, достаточно применить к r отображение $f \otimes f$, где f: $\mathfrak{a} \subset sl(n)$ задано формулой $f(A) = A - \frac{1}{N}(Tr\, A) \cdot E$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Белавин А. А.* Дискретные группы и интегрируемость квантовых систем.— Функц. анализ, 1980, т. 14, вып. 4, с. 18—26.
2. *Жибер А. В., Шабат А. Б.* Уравнения Клейна — Гордона с нетривиальной группой.— ДАН СССР, 1979, т. 247, № 5, с. 1103—1107.
3. *Кац В. Г.* Автоморфизмы конечного порядка полупростых алгебр Ли.— Функц. анализ, 1969, т. 3, вып. 3, с. 94—96.
4. *Кац В. Г.* Простые неприводимые градуированные алгебры Ли конечного роста.— Изв. АН СССР, сер. матем., 1968, т. 32, №6, с. 1323—1367.
5. *Кулиш П. П., Склянин Е. К.* О решениях уравнения Янга — Бакстера.— В сб. Дифференциальная геометрия группы Ли и механика,— Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1980, т. 95, с. 129—160.
6. *Лезнов А. Н., Савельев М. В., Смирнов В. Г.* Теория представлений групп и интегрирование нелинейных динамических систем. Препринт ИФВЭ, 80—51, Серпухов: ИФВЭ, 1980.
7. *Макдональд И. Г.* Аффинные системы корней и η-функция Дедекинда.— Математика, 1972, т. 16, вып. 4, с. 3—49.
8. *Серр Ж.-П.* Алгебры Ли и группы Ли. М.: Мир, 1969.
9. *Чередник И. В.* Об одном методе построения факторизованных S-матриц в элементарных функциях.— Теорет. и матем. физика, 1980, т. 43, № 1, с. 117—119.
10. *Bogoyavlensky O. I.* On perturbations of the periodic Toda lattice.— Comm. Math. Phys., 1976, v. 51, p. 201—209.
11. *Kac V. G.* Infinite-dimensional algebras, Dedekind's η-function, classical Möbius function and the very strange formula.— Adv. in Math., 1978, v. 30, № 2, p. 85—136.
12. *Michailov A. V., Olshanetsky M. A., Perelomov A. M.* Preprint ITEP-64, Moscow: ITEP, 1980.

12a. *Bulgadaev S. A.*, Two-dimensional integrable field theories connected with simple Lie algebras.— P. L., 1980, v. 96B, p. 151—153.

13. *Ooms A. I.* On Lie algebras having a primitive universal envelopping algebra.— J. of Algebra, 1975, v. 32, № 3, p. 488—500.
14. *Ooms A. I.* On Lie algebras with primitive envelopes.— Supplements, Proc. Amer Math. Soc., July 1976, v. 58, p. 67—72.
15. *Ooms A. I.* On Frobenius Lie algebras.— Comm. in Algebra, 1980, v. 8 (1), p. 13—52
16. *Weil A.* Varietes abeliennes et courbes algebriques. Paris: Hermann, 1948.
17. *Weil A.* On algebraic groups of transformations, Amer. J. of Math., 1955, v. 77, p. 355—391.

Институт теоретической физики АН СССР им. Л. Д. Ландау
Физико-технический институт низких температур АН УССР

Поступила в редакцию 24 декабря 1981 г.