А. А. Белавин, Дискретные группы и интегрируемость квантовых систем, *Функц. анализ и его прил.*, 1980, том 14, выпуск 4, 18–26

Функциональный анализ и его приложения,
т. 14, вып. 4, 1980, 18—26.

УДК 517.43 + 519.46

ДИСКРЕТНЫЕ ГРУППЫ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

А. А. Белавин

Статья устроена по следующему плану. В первой части, носящей вводный характер, описаны уравнения треугольников (или уравнения Янга — Бакстера), которые являются закодированным выражением скрытой симметрии одномерных квантовых или классических интегрируемых систем [1] — [12], а также двумерных решеточных статистических моделей типа Бакстера [4], [8], [10]. Во второй части введен принцип инвариантности относительно дискретной подгруппы группы Лоренца, действующей независимо на состояния частиц с различными импульсами. Далее, показано, что этот принцип приводит к определению всех элементов двухчастичной S-матрицы, удовлетворяющей уравнению треугольников. Таким образом, показано, что скрытая симметрия систем заключается в инвариантности относительно действия указанной выше группы. В третьей части приведены примеры двухчастичных S-матриц, построенные из требования инвариантности (точнее, автоморфности) относительно действия дискретной подгруппы. В четвертой части обсуждаются возможные обобщения данного подхода в том числе и многомерные.

Уравнения треугольников и интегрируемые системы

Впервые уравнения треугольников были получены Янгом [3] при рассмотрении задачи об нерелятивистских различных частицах с парным δ-функционным взаимодействием. Янг установил, что для самосогласованности Бёте-анзатца двухчастичные амплитуды рассеяния должны подчиняться некоторым функциональным соотношениям (уравнения треугольников). Впоследствии такие же уравнения возникли в релятивистской теории рассеяния [9] — [11] как условия факторизации многочастичной S-матрицы. Факторизация S-матрицы обеспечивает сохранение числа частиц и наборов импульсов. Уравнения факторизации в релятивистской теории, включающей N различных сортов частиц, имеют вид

$$S_{i_1i_2}^{k_1k_2}(u_1-u_2)\,S_{k_1i_3}^{j_1k_3}(u_1-u_3)\,S_{k_2k_3}^{j_2j_3}(u_2-u_3) = S_{i_2i_3}^{k_2k_3}(u_2-u_3)\,S_{i_1k_3}^{k_1j_3}(u_1-u_3)\times$$
$$\times S_{k_1k_2}^{j_1j_2}(u_1-u_2); \qquad (1)$$

здесь $S_{i_1i_2}^{j_1j_2}(u_1-u_2)$ — двухчастичная S-матрица, i_1, i_2, i_3 (j_1, j_2, j_3) обозначают сорта начальных (конечных) частиц и принимают значения от 1 до N. По повторяющим значкам k_1, k_2, k_3 в (1) происходит суммирование от 1 до N. Величины u_1, u_2, u_3 обозначают быстроты трех сталкивающихся частиц, связанные с энергией (импульсом) соотношением $E = m \operatorname{ch} u$ ($p = m \operatorname{sh} u$). Для дальнейшего нам будет удобна более компактная запись уравнения (1). Из (1) видно, что величины $S_{i_1i_2}^{j_1j_2}$ перемножаются как тензорные произведения матриц. Введем вместо $S_{i_1i_2}^{j_1j_2}$ обозначение S^{12}, где индексы 1 и 2 обозначают, что S^{12} является матрицей в 1-м и 2-м векторном пространстве. Еще более ясно это можно записать, введя $(I^1_\mu)^{j_1}_{i_1}$, $(I^2_\mu)^{j_2}_{i_2}$, $(I^3_\mu)^{j_3}_{i_3}$ — базис матриц $N \times N$ в 1-м, 2-м и 3-м пространстве. (Например, I_μ — матрицы Паули для $N = 2$.) Тогда $S^{12}(u) = w_{\mu\nu}(u) I^1_\mu \otimes I^2_\nu \otimes 1^3$.

Теперь уравнение (1) принимает вид

$$S^{12}(u_1 - u_2) S^{13}(u_1 - u_3) S^{23}(u_2 - u_3) = S^{23}(u_2 - u_3) S^{13}(u_1 - u_3) \times \times S^{12}(u_1 - u_2). \quad (2)$$

В ряде работ [4] — [6] Бакстер рассмотрел решеточные статистические двумерные модели. В этих моделях флуктуирующие переменные располагаются на ребрах и принимают N значений. Статистический вес данной конфигурации определяется как произведение вершинных весов $S^{j_1 j_2}_{i_1 i_2}$, где i_1, i_2, j_1, j_2 — значения переменных на ребрах, прилегающих к данной вершине. Трансфер-матрица модели определяется следующим образом:

$$\hat{T}^{\{j\}}_{\{i\}}(u) \equiv \hat{T}^{j_1 \ldots j_M}_{i_1 \ldots i_M}(u) = S^{j_1 k_1}_{i_1 k}(u) S^{j_2 k_2}_{i_2 k_1}(u) \ldots S^{j_M k}_{i_M k_{M-1}}. \quad (3)$$

Бакстер показал, что если (1) выполнено, то

$$[\hat{T}(u), \hat{T}(v)] = 0. \quad (4)$$

Выполнение соотношения (4) позволило Бакстеру найти свободную энергию восьмивершинной модели. Семейство коммутирующих $\hat{T}(u)$ связано с одномерными квантовыми спиновыми цепочками типа одномерной модели Гейзенберга. Для гамильтониана последней имеет место следующая связь с $\hat{T}(u)$:

$$\hat{H}_{\text{гейзенб.}} = \left. \frac{d \ln \hat{T}(u)}{du} \right|_{u=0}. \quad (5)$$

Благодаря (4), модель обладает серией интегралов движения

$$[\hat{H}_{\text{гейзенб.}}, \hat{T}(u)] = 0 \quad (6)$$

и является полностью интегрируемой на квантовом уровне. В работах Л. Д. Фаддеева, Е. К. Склянина и Л. А. Тахтаджяна [7], [8] был развит квантовый метод обратной задачи, позволяющий находить собственные векторы и собственные значения энергии для $\hat{T}(u)$, используя свойство (1). Связь между факторизованной теорией рассеяния и решаемыми решеточными теориями была установлена А. Б. Замолодчиковым [10].

Укажем, наконец, связь решений уравнений (1) с классическими системами, интегрируемыми методом обратной задачи рассеяния. Впервые эта связь была установлена Е. К. Склянином [13] для случая модели Бакстера. Будем считать $S^{12} = 1 + \hbar X^{12}$, где $\hbar \ll 1$. Тогда первый неисчезающий член в (1) или (2) имеет вид

$$[X^{12}(u), X^{13}(u+v)] + [X^{12}(u), X^{23}(v)] + [X^{13}(u+v), X^{23}(v)] = 0. \quad (7)$$

Введем явную параметризацию величин $X^{12}(u)$,

$$X^{12}(u) = v_{\mu\nu}(u) I^1_\mu I^2_\nu; \quad (8)$$

здесь I_μ — базис некоторой подалгебры Ли, принадлежащей $\mathfrak{gl}(N)$, с коммутационными соотношениями со структурными константами $F^\lambda_{\mu\nu}$,

$$[I_\mu, I_\nu] = F^\lambda_{\mu\nu} I_\lambda. \quad (9)$$

Соотношения (7) представляют собой функциональные уравнения на вели чины $v_{\mu\nu}(u)$. Предположим, что (7) имеют нетривиальное решение. Введем динамические величины S_μ со скобками Пуассона

$$\{S_\mu, S_\nu\} = F^\lambda_{\mu\nu} S_\lambda. \tag{10}$$

Тогда в силу (7) и (10) величины $Q^1(u) \equiv v_{\mu\nu}(u) S_\mu I^1_\nu$, $Q^2(u) \equiv v_{\mu\nu}(u) S_\mu I^2_\nu$ удовлетворяют уравнениям

$$\{Q^1(u) \otimes Q^2(u+v)\} + [Q^1(u) \otimes 1^2, X^{12}(v)] + \\ + [1^1 \otimes Q^2(u+v), X^{12}(v)] = 0. \tag{11}$$

Из (11) следует, что для любых целых n и l

$$\{\mathrm{Tr}\, Q^n(u), \ \mathrm{Tr}\, Q^l(v)\} = 0. \tag{12}$$

Теперь можно включить динамику, вводя функцию гамильтониана H как след некоторой степени матрицы $Q(u_0)$ при фиксированном значении параметра $u = u_0$. Уравнения

$$\dot{S}_\mu = \{S_\mu, H\}, \tag{13}$$

как видно из (12), обладают рядом интегралов движения. Чтобы получить одномерные системы, надо ввести величины $S_\mu(x)$, зависящие не только от времени, но и от координаты x, определив между ними скобки Пуассона следующим образом:

$$\{S_\mu(x), S_\nu(y)\} = F^\lambda_{\mu\nu} S_\lambda(x) \delta(x-y). \tag{14}$$

Тогда оператор $\hat{L}$ определяется как

$$\hat{L}(u) = \frac{\partial}{\partial x} + v_{\mu\nu}(u) S_\mu(x) I_\nu. \tag{15}$$

Вводя матрицу монодромии $M(x, x_0; u)$ $(M(x_0, x_0; u) = 1)$ как решение уравнения

$$\hat{L}(u) M(x, x_0; u) = 0, \tag{16}$$

получим из уравнения, аналогичного (11), что

$$\{\mathrm{Tr}\, M(x, x_0; u), \ \mathrm{Tr}\, M(x, x_0; v)\} = 0. \tag{17}$$

Таким образом, любое нетривиальное решение уравнений (1) приводит к существованию интегрируемых квантовых классических или статистических систем. Вопрос состоит в том, как обнаружить решения этих уравнений. На первый взгляд удивительно, что такие решения вообще существуют, так как число уравнений в (1) намного превосходит число неизвестных функций. Например, в случае отсутствия каких-либо симметрий существует N^4 величин $S^{j_1 j_2}_{i_1 i_2}(u)$, в то время как число уравнений (1) равно N^6.

Принцип инвариантности относительно дискретной подгруппы группы Лоренца

Предположим, что мы знаем некоторое нетривиальное решение S_0^{12} уравнений (2) при $u_1 = u_2 = u_3$. Пример такого решения: $S_0^{12} = P^{12}$, где $P^{j_1 j_2}_{i_1 i_2} = \delta^{j_2}_{i_1} \delta^{j_1}_{i_2}$. Предположим, далее, что S_0^{12} остается неизменным при некоторой группе G преобразований в 1-м и 2-м векторном пространстве одновременно:

$$g^{-1} \otimes g^{-1} S_0^{12} g \otimes g = S_0^{12}, \quad g \in G.$$

Тогда справедлива

Теорема.

$$S^{12}_{g_2^{-1}g_1} S^{13}_{g_3^{-1}g_1} S^{23}_{g_3^{-1}g_2} = S^{23}_{g_3^{-1}g_2} S^{13}_{g_3^{-1}g_1} S^{12}_{g_2^{-1}g_1}, \tag{18}$$

где $S^{12}_g \overset{\text{def}}{=} g^{-1} \otimes 1 S^{12}_0 g \otimes 1$, $g_1, g_2, g_3 \in G$.

Доказательство осуществляется прямой подстановкой в (1) или (2).

Мы воспользуемся этим фактом следующим образом. Рассмотрим целочисленную решетку в комплексной плоскости быстрот

$$u_{\mathbf{k}} = k_1 + \tau k_2. \tag{19}$$

Здесь $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ — целочисленный вектор на решетке, τ — комплексное число ($\operatorname{Im} \tau > 0$). Поставим в соответствие каждой точке решетки $\mathbf{k}$ матрицу $G_{\mathbf{k}}$ размера $N \times N$ из $\mathrm{GL}(N)$. Потребуем, чтобы матрицы $G_{\mathbf{k}}$ обладали следующими свойствами:

$$G_{\mathbf{k}} G_{\mathbf{l}} = s(\mathbf{k}, \mathbf{l})\, G_{\mathbf{k}+\mathbf{l}}, \qquad G_{\mathbf{k}}^{-1} = G_{-\mathbf{k}}, \qquad G_0 = 1. \tag{20}$$

Здесь $s(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ — некоторый скалярный множитель. Тем самым требуется, чтобы матрицы $G_{\mathbf{k}}$ образовывали представление (проективное из-за $s(\mathbf{k}, \mathbf{l})$) коммутативной группы сдвигов по решетке.

Теперь легко проверить, что с помощью матриц $G_{\mathbf{k}}$ можно построить решение (1) во всех точках решетки:

$$S^{12}(u_{\mathbf{k}}) = \underset{1}{G_{\mathbf{k}}^{-1}} P^{12} \underset{1}{G_{\mathbf{k}}} = \underset{2}{G_{\mathbf{k}}} P^{12} \underset{2}{G_{\mathbf{k}}^{-1}}. \tag{21}$$

Здесь значок 1 под матрицей $G_{\mathbf{k}}$ обозначает, что она действует лишь на индексы i_1, j_1 частиц с быстротой u_1, то же относится к значку 2. Второе равенство в (21) вытекает из инвариантности $S^{12}(0) = P^{12}$ при любом преобразовании из $\mathrm{GL}(N)$. В силу групповых свойств (20) $G_{\mathbf{k}}$ имеет вид

$$G_{\mathbf{k}} \equiv G_{k_1, k_2} = g^{k_1} h^{k_2}; \tag{22}$$

здесь $g \equiv G_{1,0}$, $h \equiv G_{0,1}$. Требование (20) будет выполнено, если

$$gh = \omega hg, \tag{23}$$

где ω — скалярный множитель (матрица вида $\begin{pmatrix} \omega & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega \end{pmatrix}$). Последнее, что нам осталось сделать, это восстановить аналитическую мероморфную матрицу $S^{12}(u)$, которую из (21) мы знаем во всех точках решетки. В силу мероморфности S-матрицы ее с точностью до скалярного множителя, который сокращается в (1), можно считать целой функцией. Из (21) видно, что

$$\begin{aligned} S^{12}(u_{\mathbf{k}} + 1) &= \underset{1}{g^{-1}} S^{12}(u_{\mathbf{k}}) \underset{1}{g} = \underset{2}{g} S^{12}(u_{\mathbf{k}}) \underset{2}{g^{-1}}, \\ S^{12}(u_{\mathbf{k}} + \tau) &= \lambda \underset{1}{h^{-1}} S^{12}(u_{\mathbf{k}}) \underset{1}{h} = \lambda \underset{2}{h} S^{12}(u_{\mathbf{k}}) \underset{2}{h^{-1}}. \end{aligned} \tag{24}$$

Потребуем теперь, чтобы при произвольных u матрица $S^{12}(u)$ обладала теми же свойствами

$$S^{12}(u + 1) = \underset{1}{g^{-1}} S^{12}(u) \underset{1}{g} = \underset{2}{g} S^{12} \underset{2}{g^{-1}}, \tag{25$'$}$$

$$S^{12}(u + \tau) = \lambda \exp(2\pi i u) \underset{1}{h^{-1}} S^{12}(u) \underset{1}{h} = \lambda \exp(2\pi i u) \underset{2}{h} S^{12} \underset{2}{h^{-1}}; \tag{25$''$}$$

здесь для совместности с (25′) множитель в (25″) должен быть выбран периодической функцией u; требования автоморфности (25′), (25″) вместе с начальным условием $S^{12}(0) = P^{12}$ однозначно определяют двухчастичную S^{12}-матрицу. Решение (25) можно найти, например, разложением $S^{12}(u)$ в ряд Фурье. Для того чтобы построенная таким образом матрица $S^{12}(u)$ являлась решением (1), матрицы g и h должны удовлетворять некоторым условиям, которые будут продемонстрированы ниже.

Вспомним теперь, что аргумент $S^{12}(u)$ равен разности быстрот сталкивающихся частиц $u = u_1 - u_2$. Поэтому (25) обозначают требования инвариантности двухчастичной S-матрицы при дискретном преобразовании Лоренца одного из импульсов частиц (например, отвечающего быстроте u_1), участвующих в столкновении, сопровождаемом некоторым преобразованием одной из частиц в начале и одной в конце с быстротой u_1 в себя или в частицу другого сорта (преобразование с матрицами g и h). Рассмотрим теперь пример, который позволит осуществить описанную выше конструкцию явно.

$\boldsymbol{Z_N \times Z_N}$-симметричная $\boldsymbol{S}$-матрица

Возьмем в качестве g и h матрицы, для которых $g^N = h^N = 1$, $\omega = \exp(2\pi i/N)$; их можно выбрать в виде

$$g = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \omega & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \omega^{N-1} \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Далее удобно ввести следующий полный базис матриц $N \times N$:

$$I_{\boldsymbol{\alpha}} \equiv I_{\alpha_1, \alpha_2} = g^{\alpha_1} h^{\alpha_2}, \tag{27}$$

где $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, \dots, N-1$. Для $N = 2$ $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, поэтому $I_{0,0} = 1$, $I_{1,0} = \sigma_z$, $I_{0,1} = \sigma_x$, $I_{1,1} = i\sigma_y$. Любую матрицу $S^{12}(u)$ можно записать в виде

$$S^{12}(u) = w_{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}}(u)\, I^1_{\boldsymbol{\alpha}} \otimes I^2_{\boldsymbol{\beta}}. \tag{28}$$

Из вторых равенств в (25), (26) следует ограничение на $S^{12}(u)$, $Z_N \times Z_N$-инвариантность:

$$S^{12}(u) = w_{\boldsymbol{\alpha}}(u)\, I^1_{\boldsymbol{\alpha}} \otimes \bar{I}^2_{\boldsymbol{\alpha}}. \tag{29}$$

Черта над $I_{\boldsymbol{\alpha}}$ обозначает эрмитово сопряжение. Легко проверить, что

$$S^{12}(0) = P^{12} = I^1_{\boldsymbol{\alpha}} \otimes \bar{I}^2_{\boldsymbol{\alpha}}. \tag{30}$$

Подставляя (29) и (26) в (25) и (30), получим

$$w_{\boldsymbol{\alpha}}(u+1) = \omega^{\alpha_2} w_{\boldsymbol{\alpha}}(u), \quad w_{\boldsymbol{\alpha}}(u+\tau) = \lambda \exp(2\pi i u)\, \omega^{\alpha_1} w_{\boldsymbol{\alpha}}(u),$$
$$w_{\boldsymbol{\alpha}}(0) = 1. \tag{31}$$

Решение (31) достигается разложением в ряд Фурье и имеет вид

$$w_{\boldsymbol{\alpha}}(u) = \frac{\Theta_{\boldsymbol{\alpha}}(u+\eta)}{\Theta_{\boldsymbol{\alpha}}(\eta)}; \tag{32}$$

здесь

$$\Theta_{\boldsymbol{\alpha}}(u) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left[i\pi\left(m + \frac{\alpha_2}{N}\right)^2 \tau + 2\pi i\left(m + \frac{\alpha_2}{N}\right)\left(u + \frac{\alpha_1}{N}\right)\right]. \tag{33}$$

Гипотеза. $S^{12}(u)$, даваемая формулами (29), (32), (33), удовлетворяет (1).

Для $N=2$ это решение совпадает с рассмотренным Бакстером [5], [6].

Покажем теперь на этом примере, как (25) уменьшает число уравнений в (1) до числа неизвестных функций. Из (29) видно, что число функций w_α равно N^2. С помощью сдвигов на τ и (25″) любое уравнение из (1) можно превратить в уравнение, для которого $i_1 = i_2 = i_3 = 1$. Кроме того, из (25) следует, что $j_1 + j_2 + j_3 = i_1 + i_2 + i_3 \pmod N$. Таким образом, число уравнений также равно N^2.

Способом, аналогичным описанному выше, можно построить решение уравнений (1) через Θ-функции многих переменных. Для этого достаточно заменить величину u n-мерным вектором $\mathbf{u}$, а индексы i, j также считать векторными: $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_n)$, $\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_n)$. Вместо уравнений (25) следует ввести требование автоморфности относительно $2n$ сдвигов

$$u_\alpha \to u_\alpha + \delta_{\alpha\beta}, \qquad u_\alpha \to u_\alpha + \tau_{\alpha\beta}, \qquad \alpha, \beta = 1, \ldots, n, \qquad \operatorname{Im} |\tau_{\alpha\beta}| > 0. \tag{34}$$

Матрицы g и h очевидным образом заменяются на $2n$ матриц g_α и h_α. Например, $g_\alpha = 1 \otimes \ldots \otimes g \otimes \ldots \otimes 1$, и аналогичное выражение для матриц h_α. Здесь индекс α обозначает, что матрица g_α действует на значки i_α, j_α как g, а на остальные как единичная.

Доказательство того, что построенные таким образом $S^{12}(u)$ удовлетворяют (1) при всех u, должно использовать факт выполнения (1) при $u_1 = u_2 = u_3$. Поскольку прямое доказательство и тем самым ограничения на вид g и h в настоящее время неизвестны, ниже будут приведены косвенные аргументы в пользу того, что (32) удовлетворяют (1).

Анализ уравнений (7)

Как следует из (33), $\Theta_{0,0}(1+\tau) = 0$. Возьмем величину η в (32) близкой к $1+\tau$,

$$\eta = 1 + \tau + \hbar, \qquad \hbar \ll 1. \tag{35}$$

Тогда $S^{12}(u)$ с точностью до множителя будет иметь вид

$$S^{12}(u) = 1 + \hbar X^{12}(u). \tag{36}$$

Теорема. *$S^{12}(u)$ удовлетворяет (1) с точностью до $\hbar^2$.*

Величина $X^{12}(u)$ является уже мероморфной двоякопериодической функцией, поскольку множитель $\Theta_{0,0}(u)$ был вынесен при получении (36). Ниже мы докажем, что $X^{12}(u)$ удовлетворяет уравнению (7). Это свидетельствует о том, что полная $S^{12}(u)$-матрица, даваемая уравнением (32), удовлетворяет уравнению (1). Другим аргументом в пользу этого является прямая проверка (1), выполненная Бабуджяном и Тетельманом в вырожденном случае, получающемся из (32) при $\tau \to \infty$.

Теперь мы рассмотрим уравнения (7). Это имеет самостоятельную ценность в силу упомянутой выше связи этих уравнений с классическими интегрируемыми системами.

Заметим, что впервые уравнения (7) были исследованы В. А. Фатеевым, получившим ряд интересных результатов.

Предположим, что решение уравнения (7) имеет лишь один полюс при u_0,

$$X^{12}(u) = \frac{t_0^{12}}{u - u_0}. \tag{37}$$

Подстановка (37) в (7) показывает, что это возможно лишь в двух случаях: либо $u_0 \neq 0$, но

$$[t_0^{12},\ t_0^{13}] = 0, \tag{38}$$

либо $u_0 = 0$,

$$[t_0^{12},\ t_0^{13}] + [t_0^{12},\ t_0^{23}] = 0. \tag{39}$$

Рассмотрим пока вторую возможность (39). Нетрудно проверить, что (39) будет удовлетворяться, если

$$t^{12} = I_\mu^1 \otimes I_\mu^2, \tag{40}$$

где I_μ образуют базис некоторой подалгебры Ли, принадлежащей $\mathfrak{gl}(N)$, и $\operatorname{tr} I_\mu I_\nu = \delta_{\mu\nu}$. Можно показать также, что (40) является общим решением (39).

Допустим теперь, что $X^{12}(u)$ обладает несколькими полюсами. Тогда уравнения (7) показывают, что сумма положений двух полюсов должна быть положением другого полюса, если снова опустить возможность типа (38). Тем самым мы приходим к заключению, что полюса $X^{12}(u)$ образуют решетку

$$X^{12}(u) \to \frac{t_{\mathbf{k}}^{12}}{u - k_1 - \tau k_2}; \tag{41}$$

при $u \to k_1 + \tau k_2$, $\operatorname{Im} \tau > 0$, $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ имеют место следующие соотношения на вычеты:

$$[t_{\mathbf{k}}^{12},\ t_{\mathbf{k+l}}^{13}] + [t_{\mathbf{k}}^{12},\ t_{\mathbf{l}}^{23}] = 0, \quad [t_{\mathbf{k}}^{21},\ t_{\mathbf{k+l}}^{31}] + [t_{\mathbf{k}}^{21},\ t_{\mathbf{l}}^{32}] = 0,$$
$$[t_{\mathbf{k}}^{12},\ t_{\mathbf{k+l}}^{13}] + [t_{\mathbf{k}}^{12},\ t_{-\mathbf{l}}^{32}] = 0. \tag{42}$$

При $\mathbf{k} = \mathbf{l} = 0$ (42) совпадают с (39), полное решение которых (40) нам известно. Все уравнения (42) удастся удовлетворить, если существуют матрицы $G_{\mathbf{k}}$, образующие проективное представление группы сдвигов на решетке, т. е.

$$G_{\mathbf{k}} G_{\mathbf{l}} = s(\mathbf{k}, \mathbf{l})\, G_{\mathbf{k+l}}, \qquad G_{\mathbf{k}} = G_{-\mathbf{k}}, \quad G_0 = 1. \tag{43}$$

Теперь можно записать решение (42) в виде

$$t_{\mathbf{k}}^{12} = (G_{\mathbf{k}}^{-1} I_\mu^1 G_{\mathbf{k}}) \otimes I_\mu^2 = I_\mu^1 \otimes (G_{\mathbf{k}} I_\mu^2 G_{\mathbf{k}}^{-1}). \tag{44}$$

Второе равенство в (44) требует, чтобы матрица $G_{\mathbf{k}}$ принадлежала той же группе Ли, для которой I_μ образуют алгебру Ли. Из (44) видно, что групповые свойства (43) должны быть выполнены с точностью до множителя, пропорционального единичной матрице (т. е. $G_{\mathbf{k}}$ образуют проективное представление). Теперь мы, как и раньше, можем ввести образующие

$$g \equiv G_{1,0}, \qquad h \equiv G_{0,1} \tag{45}$$

и записать $G_{\mathbf{k}}$ в виде

$$G_{\mathbf{k}} = g^{k_1} h^{k_2}, \tag{46}$$

$$gh = \omega\, hg. \tag{46'}$$

Для продолжения решения на произвольные u потребуем, чтобы g и h были элементами конечного порядка *). Например,

$$g^N = h^N = 1, \qquad \omega = \exp\left(\frac{2\pi i e}{N}\right). \tag{47}$$

*) Как объяснил мне С. П. Новиков, это следует из теории конечномерных представлений группы (46′).

Требуя, чтобы матрица $X^{12}(u)$ удовлетворяла свойствам автоморфности, согласованным с (44), получим

$$X^{12}(u+1) = \underset{1}{g}^{-1} X^{12}(u)\, \underset{1}{g}, \qquad X^{12}(u+\tau) = \underset{1}{h}^{-1} X^{12}(u)\, \underset{1}{h}. \tag{48}$$

Спрашивается, при каких условиях на g и h существует мероморфная функция, удовлетворяющая (48). Как видно из (48), $X^{12}(u)$ является двоякопериодической функцией с вещественным периодом N и комплексным $N\tau$. Такая функция существует и определяется с точностью до прибавления константы (при задании вычетов и положения полюсов), если сумма вычетов в параллелограмме периодов равна нулю. Тем самым с учетом (44) мы имеем следующие условия на g и h:

$$\sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} G_{\mathbf{k}}^{-1} I_\mu G_{\mathbf{k}} = 0 \qquad \text{для всех } \mu. \tag{49}$$

Наконец, константа исключается условием автоморфности (48). Нетрудно понять, что в силу той же теоремы Лиувилля построенная таким образом функция $X^{12}(u)$ действительно удовлетворяет (7). Если взять в качестве g и h матрицы (26), а в качестве генераторов I_α (27), то все условия, включая (49), будут удовлетворены. С другой стороны, именно это решение получается предельным переходом (35) из выражения (32). Тем самым мы частично доказали, что (32) удовлетворяет (1).

Заключение

Обобщения данного подхода возможны по различным линиям.

Во-первых, тензорное произведение трех N-мерных векторных пространств можно заменить на три различных линейных пространства. Например, индексы i, j могут принимать непрерывные значения. Тем самым S^{12} из тензорного произведения матриц превращается в тензорное произведение линейных интегральных операторов. Во-вторых, аргументами S^{12} можно считать два вектора p_1 и p_2, на которые действует некоторая группа движений, отличная от группы Лоренца; при этом требуется, чтобы $S^{12}(p_1, p_2)$ была инвариантом относительно действия группы. Уравнение (2) теперь примет вид

$$S^{12}(p_1, p_2)\, S^{13}(p_1, p_3)\, S^{23}(p_2, p_3) = S^{23}(p_2, p_3)\, S^{13}(p_1, p_3)\, S^{12}(p_1, p_3). \tag{50}$$

Теперь роль сдвигов по решетке должна играть дискретная подгруппа данной группы движения, действующая отдельно на p_1, p_2 или p_3. Интересным является вопрос о нахождении собственных векторов квантовых операторов типа (5) и трансфер-матриц из требования, чтобы эти векторы преобразовывались по представлениям дискретной подгруппы.

Наконец, самым интересным является вопрос о многомерных интегрируемых системах. В замечательной работе А. Б. Замолодчикова [12] был сделан важный шаг в этом направлении. А. Б. Замолодчиков рассмотрел трехмерные решеточные системы, обладающие свойствами, аналогичными (1). При интерпретации на языке теории рассеяния роль частиц при его подходе играют бесконечные одномерные релятивистские струны, испытывающие тройные столкновения в двумерном пространстве (+ время). Роль уравнений треугольников (1) играют уравнения тетраэдров на амплитуды трехструнного столкновения. Эта величина зависит от единичных векторов $\mathbf{n}_i$, нормальных к мировой плоскости распространения струны, лоренц-инвариантным образом, т. е. S^{123} зависит от скалярных произведений векторов $\mathbf{n}_i$, $\mathbf{n}_j$. Возможно, что величина S^{123} $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$ может быть определена из требования автоморфности относительно действия какой-либо дискретной подгруппы группы Лоренца, т. е. группы вещественных унимодулярных матриц второго порядка.

Я особенно благодарен Александру Замолодчикову и В. Фатееву за многочисленные обсуждения и сотрудничество.

Я очень признателен И. Череднику и А. Михайлову за разъяснение мне очень интересной работы [14], [15] А. Михайлова. В этой работе идея автоморфности относительно действия дискретной группы в комплексной плоскости спектрального параметра была впервые применена при анализе проблемы редукций в уравнениях Захарова — Шабата. Я также благодарен за помощь и обсуждения Е. И. Рябовой, Г. Бабуджяну, В. Гурарию, С. Манакову, С. П. Новикову, А. Полякову, М. Тетельману и Г. Элиашбергу.

Институт теоретической физики
им. Л. Д. Ландау

Поступила в редакцию
12 июня 1980 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Bethe H., Zur Theorie der Metalle. I. Eigenwerte und Eigenfunktionen Atomkette, Z. Phys. **71**, № 3—4 (1931), 205—226.
2. Onsager L., Crystal statistics. I. A two-dimensional model with an orde-disorder transition, Phys. Rev. **65** (1944), 117—149.
3. Yang C. N., Exact solution of the problem of n-particles with δ-interaction, Phys. Rev. **168** (1968), 1920—1925.
4. Baxter R. J., Partition function of the eight-vertex lattice model, Ann. Phys. (N. Y.) **70** (1972), 323—337.
5. Baxter R. J., Eight-vertex model in lattice statistics and one-dimensional anisotropic Heisenberg chain, Ann. Phys. **76** (1973), 1—71.
6. Baxter R. J., Z-invariant models in lattice statictics, Phyl. Trans. Roy. Soc. **289** (1978), 315—340.
7. Фаддеев Л. Д., Склянин В. К., Тахтаджян Л. А., Квантовый метод обратной задачи и уравнение Синус-Гордон, Препринт ЛОМИ Р—I—79, Ленинград, 1979.
8. Фаддеев Л. Д., Квантовый метод обратной задачи рассеяния, Препринт ЛОМИ Р—2—79, Ленинград, 1979.
9. Zamolodchikov A. B., Zamolodchikov Al. B., Relativistic factorised S-matrixs, Ann. Phys. (N. Y.) **120** (1979), 253—278.
10. Zamolodchikov A. B., Factorised S-matrixs and exact soluable lattice models, Sov. sciencs, Rev., Phys. Rev. **2** (1980), 100—135.
11. Karowski M., Thun H., Truong T., Weisz P., On the uniqueness of a purely elastic S-matrix in $(1+1)$ dimensions, Phys. Letters **67B** (1977), 321—322.
12. Замолодчиков А. Б., Уравнение тетраэдров и трехмерные интегрируемые системы, ЖЭТФ **79**, № 8 (1980), 641—664.
13. Склянин В. К., Уравнение Ландау — Лифшица и модель Бакстера, Препринт ЛОМИ Е—3—1979, Ленинград, 1979.
14. Михайлов А. В., Проблема редукций в уравнениях Захарова — Шабата, Письма в ЖЭТФ **30** (1979), 443—447.
15. Михайлов А. В., Проблема редукций в уравнениях Захарова — Шабата, Труды киевской конференции, 1979.